微分几何基础

方德植编著

科学出版社



微分几何基础

方德植 编著

科学出版社

1984

内 容 简 介

本书采用活动标架法讲述微分几何基础理论。

全书共分四章和一个附录。第一章介绍微分几何中常用的一些基本概念。第二章论述欧氏微分几何。第三章扼要地介绍仿射微分几何。第四章比较详细地论述射影微分几何，对我国微分几何学家早期在这个领域里的贡献作了系统的介绍。最后在附录中编入若干问题与定理供读者参考。

本书可供学过初等微分几何的读者阅读。

微分几何基础

方德植 编著

责任编辑 杜小杨 张鸿林

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年12月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1984年12月第一次印刷 印张：11 1/8

印数：0001—13,800 字数：291,000

统一书号：13031·2736

本社书号：3769·13—1

定价：2.10元

序　言

微分几何已有悠久的历史，自从 Newton 与 Leibniz 奠定了微积分基础以后，就产生了微分几何。虽然它有了三百多年的发展史，但至今仍继续蓬勃地向前发展着。它的产生和发展跟分析有着不可分割的联系，分析的许多问题正是由几何问题提出的。微分几何成为一门独立的学科始于 Gauss。1827年Gauss 发表了“关于曲面的一般研究”一文，奠定了近代形式的曲面论基础。他是从解决绘制地图的实际要求出发的。

所谓“欧氏微分几何”的完整理论是在上世纪形成的，它的发展在 Darboux 所著的《一般曲面论讲义》里作了全面的总结。

到了1854年，Riemann 把 Gauss 的曲面论推广到 n 维空间里去。这个重要思想是在他的演讲《关于几何的基本的假设》中提出的，从而奠定了 Riemann 几何的基础，它有着广泛的应用，相对论就是以 Riemann 几何为基础的。

在 Klein(1872)所发表的“爱尔兰根(Erlangen)纲领”里提出了群论观点以后，自本世纪初，从欧氏微分几何发展了一系列新分支：如仿射微分几何，射影微分几何，共形微分几何等。它们都是统一在群论观点之下，研究几何图形在各种变换下的不变性质。

群论观点在几何上的应用由 E. Cartan 所发展，他建立了“联络空间”的各种几何。这些都是现代微分几何的主要内容。

微分几何包括两部分：局部的与整体的（或大范围的）。现代微分几何是研究整体性质的，为搞清整体性质，必须先研究局部性质。

本书着重于论述曲线与曲面的局部性质，书中共分四章和一个附录(问题与定理)。为了论述的需要，在第一章里粗略地介绍了一些有关的基本概念。例如：微分流形、外微分法、变换群的

概念等．第二章介绍欧氏微分几何，就是研究在欧氏运动群之下曲线和曲面的不变性质，也涉及一些直线几何的内容，例如直纹面和直线汇的理论．在这里主要论述曲线和曲面的局部性质，同时适当地介绍整体微分几何的内容．在论述过程中，自始至终采用 Cartan 矩阵和活动标架法作为主要工具．第三章也采用同样的方法扼要地介绍仿射空间中的微分几何，着重论述在仿射群之下曲线和曲面的不变性质，并介绍曲线和曲面的局部性质．这里有必要提出苏步青教授在二十年代后期对仿射微分几何作出的重大贡献，单是在"仿射空间的曲面论"这个标题下，在三年内(1928—1930)，在日本各种数学期刊上发表了十二篇论文；在此期间内还发表了其他有关论文二十余篇．他在这个领域中的贡献，在当时已享有国际声誉．他在这个领域中的主要成就已经在最近出版的专著《仿射微分几何》(科学出版社，1982)里作了全面的总结．第四章是本书的重点．由于我国的几何学家在射影微分几何的领域里，曾在国内外专刊上发表过不少的重要论文，其中有许多研究成果已被各国论著所引用；在国际上早已公认我国对射影微分几何方面的研究形成了具有明显特点的学派，因此，在这一章里着重介绍了我国几何学家在射影微分几何方面的成就，特别是收集了苏步青教授多年来在这个领域中所获得的许多重要成果．同时也引进了国外的一些有关论著，以充实本书的内容．最后在附录"问题与定理"中，介绍了有关的比较重要和著名的结论，供读者参考．本书主要采用 Lie 群论的观点与活动标架论的方法．由于这个学科的内容很丰富，难以作全面的论述，为了便于读者参考，书末列出"参考文献"，但它们仅包括部分参考资料．

本书可供学过初等微分几何的人阅读．

由于作者水平所限，书中难免存在不妥和错误之处，恳切地希望读者给予指正．

方德植

一九八二年十月于厦门大学

目　录

第一章　基本概念

为了阅读全书并使读者进一步学习微分几何，本章先概括地介绍一些基本概念，特别是微分流形、外微分形式、外微分、变换群等概念及其有关的性质。这些概念本身是形成近代数学基础的重要分支。至于它们的详细论述可参考有关专著。

§1.1. 流　形

1. 集合论中几个常用的记号　我们假定"对象"、"元素"、"成员"等术语都是熟知的概念，采用这些概念与通常应用的这些术语是一致的。

对集合论中常用的记号作如下的说明。今后集合有时简称为集。

设集A，B，…等的点（或元素）以$(a, a', \cdots)$，$(b, b', \cdots)$，…等来表示，以$a\in A$表示点a属于集A，读作a在A中，如果点a不属于A，记作$a\overline{\in} A$，读作a不在A中。如果A的点都属于B，也就是对每点$a\in A$，必有$a\in B$，就称A为B的一个子集。这时我们说A包含在B中，记作$A\subset B$，或者说B包含A，记作$B\supset A$。根据子集的定义，集A是它自身的一个子集。不包含元素的集叫做空集，记作$\varnothing$，空集也是A的一个子集。A和$\varnothing$叫做A的伪子集，而其他的子集叫做真子集。若一个集的每点$a\in A$，且$a\in B$，则称其为A与B的交(集)或通集，记作$A\cap B$。若一个集的任何点a或者$a\in A$或者$a\in B$，则称其为A与B的和（集）或并集，记作$A\cup B$。

令$A\subset M$，用$M-A$表示在M中而不在A中的元素的集，称其为A关于M的补集，并记作$C(A)$，$C(A)$仍是M的一个子集，

因而也可作其补集. A的补集的补集就是A,即: $C[C(A)]=A$.

2. 数空间 由n个有序实数构成的一个数组$x=(x^1,\cdots,x^n)$的全体组成的集称为n维数空间。记作R^n。R^n中的元素有时称为点; x^1, x^2, $\cdots$, x^n称为点的坐标。如果在两个点中至少各有一个同一指标的坐标彼此不相等,就把它们看作为不同的两个点,设$x^i(i=1,\cdots,n)$在$(-\infty,\infty)$中变动,则这种点的全体构成空间R^2. R^1看作是直线, R^2看作是平面, R^3看作是三维空间. 对R^n的两个点$x=(x^1,\cdots,x^n)$和$y=(y^1,\cdots,y^n)$选取

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2\right]^{1/2}$$

作为距离的定义,则称这样的空间为n维欧氏空间,记作E^n.

3. 拓扑空间的定义及其一些有关的概念 设M是一个集(不是空集), τ是M的一组子集,并满足下列四个条件:

1) $M\in\tau$,

2) $\varnothing\in\tau$,

3) τ中有限个集的交属于τ,

4) τ中任意个集的和属于τ.

我们说τ定义集M上的一个拓扑,并说τ中这些集是在M上所定义的拓扑的开集,集M与它的拓扑τ而成的序对(M,τ)称为一个拓扑空间.

对于一个给定的拓扑空间(M,τ),若$a\in M$,令O是包含a的一个开集,并有一个子集$N\subset M$包含O,则称N为a的一个邻域, a叫做N的内点. 若b为属于N的补集$C(N)$,则称b为N的外点.

任何一个开集是它的每点的邻域,反过来说也成立.

如果M的一个子集S的补集是开的,则称S为M的一个闭子集; 包含一个集$A\subset M$的一切闭集的交称为A的闭包,记作$\overline{A}$. 如果$\overline{A}=M$,则称A在M内是(处处)稠密的. 若M具有可数个元素的稠密子集(简称为可数稠密子集),则称M为可分离的. 同

时属于 $\overline{A}$ 和 $\overline{CA}$ 的点称为集 A 的边界点；边界点的集称为边界，所以边界是集 $\overline{A}\cap\overline{CA}$。

若任一集 M 的一切子集都是开集，则称这个拓扑为 M 的离散拓扑。

给定一个拓扑空间 M 和 M 的一组开集 τ，对于一个子集 $N\subset M$，则不难看出，以 $\delta=\{S:S=G\cap N, G\subset\tau\}$ 为一组开集的集 N 是一个拓扑空间，N 的这个拓扑称为由 M 的拓扑诱导出来的拓扑，或简称为诱导拓扑。

对于集 M 的每对不同点 a，b，若分别有 a 和 b 的邻域 N 和 L，使得 $N\cap L=\varnothing$，则称拓扑空间（M，τ）为分离空间或 Hausdorff（拓扑）空间。

在拓扑空间里，也可定义聚点、函数的连续性等概念。例如，设 $a\in M$，而且子集 $N\subset M$ 使得 a 的任何邻域 $U(a)$ 含有 N 中不同于 a 的一点，则称 a 为 M 的一个聚点。

现在叙述拓扑空间的一个重要的实例，所谓度量空间。

设 M 是一个点集，在 M 内每个点对（a，b）必有满足下列性质的实函数 $d(a, b)$ 和它对应：

1° $d(a, b)=0$ 的一个充要条件是 $a=b$，$a, b\in M$；

$$d(a, b)=d(b, a),\quad a, b\in M;$$

2° 三角形不等式成立：

$$d(a, b)\leqslant d(a, c)+d(b, c),$$
$$a, b, c\in M,$$

则序对（M，d）称为一个度量空间。函数 d 叫做空间（M，d）的度量函数，$d(a, b)$ 叫做 a，b 两点的距离。

当 $b=a$ 时，从1°和2°推出 $0\leqslant 2d(a, c)$。由此可见，两点的距离是非负的，并由1°可知，两不同点的距离是正的。

若在三角形不等式中，令 $c=a$，就有 $d(a, b)\leqslant d(b, a)$。但是也有相反不等式 $d(a, b)\geqslant d(b, a)$，所以 $d(a, b)=d(b, a)$，因此距离是点对的非负对称函数。

现在要证明度量空间是拓扑空间。由于距离是点对的非负对

称函数，对任一正数 ε，作出满足 $d(a,\ b)<\varepsilon$ 的点 b，这种 b 的全体叫做中心 a 和半径 ε 的球形邻域，记作 $U(a,\ \varepsilon)$。

这样，在集 M 内就可以导入拓扑结构。设子集 $N\subset M$ 对任意点 $a\in N$ 有以 a 为中心的一个球形邻域存在，使它的一切点都在 N 中，就称 N 为开集。从三角形不等式不难看出，球形邻域是开集。

空集是开集，因为否则必有一点 $a\in\varnothing$。给定一点 $a\in M$ 使对任意的 $\varepsilon>0$，$U(a,\ \varepsilon)\subset M$，因而 M 是它的每点的一个邻域，这就是说 M 是开集。所以条件 1）和 2）成立。

现在来证明，若 O_1，O_2，…，O_n 是 M 的一组开集，则

$$O_1\cap O_2\cap\cdots\cap O_n$$

也是开集。为此令

$$a\in O_1\cap O_2\cap\cdots\cap O_n,$$

则每个 O_i（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）是 a 的一个邻域，于是点 a 作为 O_i 的一点是 O_i 内半径为 ε_i 的球心，因而以 a 为中心和 ε_i 中的最小数 ε 作为半径的球形邻域包含在 O_i 的交内，所以它是开集，因而条件 3）也满足。

其次来证明，若 O 为任意个开集 O_1，O_2，…，O_n 的和，则 O 也是开集，为此令

$$a\in O,$$

则必有某一个 O_i，使得 $a\in O_i$，因而 O_i 为 a 的一个邻域，因为 $O_i\subset O$，而 O 为 a 的一个邻域，所以 O 是它的每点的邻域。所以条件 4）成立。证毕。

在第 2 段中已经讲过，对 n 维空间 R^n 的两点 $x=(x^1,\ \cdots,\ x^n)$ 和 $y=(y^1,\ \cdots,\ y^n)$ 选取

$$d(x,\ y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2\right]^{1/2}$$

作为距离的定义，则称这样的空间为 n 维欧氏空间 E^n。

事实上，容易推知，除了三角形不等式外，上面所定义的函数 $d(x,\ y)$ 具有度量性质。所以只要证明

$$d(x,\ y)\leqslant d(x,\ z)+d(y,\ z),$$
$$x,\ y,\ z\in M,$$

也就是要证明

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2\right]^{1/2}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(x^i-z^i)^2\right]^{1/2}$$
$$+\left[\sum_{i=1}^{n}(y^i-z^i)^2\right]^{1/2},$$

若令 $u^i=x^i-z^i$，$v^i=z^i-y^i$，则 $x^i-y^i=u^i+v^i$，因而只要证明

$$[(u^i+v^i)^2]^{1/2}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(u^i)^2\right]^{1/2}+\left[\sum_{i=1}^{n}(v^i)^2\right]^{1/2}.$$

把这个不等式两边平方，经过化简后，可知它等价于

$$\sum_{i=1}^{n}u^iv^i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}(u^{i2})\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}(v^{i2})\right)^{1/2},$$

这就是通常说的 Schwarz 不等式，对任意两组实数总是成立的。

4. 函数. 连续性. 同胚 设 $X=(M,\ \tau)$ 与 $Y=(M',\ \tau')$ 是两个拓扑空间。如果对于 X 的每点 P，在 Y 中有一点 P' 与 P 对应，则称这个对应为 X 到 Y 的映射，记作 $f:X\to Y$。映射可以用函数记号来表示：

$$P'=f(P)$$

P' 称为 P 的象。当 Y 的一切点都是 X 的点的象时，称 f 为 X 到 Y 上的映射。当给定 $P'\in Y$ 时，在 X 中以 P' 为象的一切点的全体称为 P' 的象源，使 P' 和它在 X 中的象源相对应的映射称为给定映射的逆映射，记作 f^{-1}。

对于映射 f 给定了点 $P\in X$ 和它在 Y 中的象 $P'=f(P)$ 的任意邻域 $U'(P')$；若找出 P 的这样的邻域 $U(P)$，使得

$$f(U(P))\subset U'(P'),$$

则称映射在 P 点是连续的。特别，如果 f 在 X 的一切点都是连续的，这时称 $f:X\to Y$ 为一个连续映射或简称为映射，X 叫做 f 的

定义空间，Y 叫做 f 的值空间。

当一对一的映射 $f: X \to Y$ 同它的逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 一起，顺次在 X, Y 上都是连续映射时，则称 f 为一个拓扑映射。当映 X 到 Y 的拓扑映射存在时，把点 $P \in X$ 和点 $P' = f(P)$ 看成同一点，就知道 X, Y 具有同一拓扑，这时称两个拓扑空间 X，Y 互为同胚。

在连续映射 $f: X \to Y$ 之下，若在 P 点有一个邻域 $U(P)$，使它与它的象 $U' = f(U)$ 同胚，就说映射 f 在 P 点是局部同胚的。显然，同胚在任意点是局部同胚的。但在每点局部同胚的映射可以不是同胚的。

给定两个拓扑空间 X_1，X_2，设 $a_1 \in X_1$，$a_2 \in X_2$，并考虑一切点对（a_1，a_2）的集。在 X_1 和 X_2 中分别取开集 O_1 和 O_2，令 $a_1 \in O_1$，和 $a_2 \in O_2$，则一切点对（a_1，a_2）的集叫做集 O_1 和 O_2 的积，记作 $O_1 \times O_2$。制作具有形式 $O_1 \times O_2$ 的和集，并定义 $X_1 \times X_2$ 内的拓扑，则不难证明 $X_1 \times X_2$ 构成一个拓扑空间，称之为空间 X_1 和 X_2 的直积或拓扑积。

若 X_1, X_2 都是 Hausdorff 空间，则 $X_1 \times X_2$ 也是 Hausdorff 空间。

欧氏平面 E^2 是两条直线的拓扑积，所以 $E^2 = E^1 \times E^1$。一般地，n 维欧氏空间可以作为 n 重拓扑积 $E^1 \times E^1 \times \cdots \times E^1$。

如果用连续映射 f 把线段 $I: a \leqslant t \leqslant b$ 映射到拓扑空间 X，它的象 $f(t)$ 称为曲线，$f(a)$，$f(b)$ 叫做这条曲线的端点。如果拓扑空间 X 的任意两点可以用连续曲线连结时，称 X 为弧式连通的。

可微性概念基于分析中导数的定义。设 r 为一正整数。若从一个开集 $U \subset R^m$ 到 R^n 的一个映射 f 在 U 上具有直到 r 阶的连续偏导数，则称 f 为 C^r 函数。

拓扑基是个重要的概念。设拓扑空间 X 以 τ 为其开集组，对于子组 $B \subset \tau$，使得任意开集可以用 B 中的开集的和集来表示，则称 B 为 X 的一个拓扑基。

例如，对于 n 维欧氏空间 E^n，开球组构成一个拓扑基。对于

离散拓扑，空集与一切单个点的集构成一个基。

若拓扑空间X含有至多由可数个集形成的一个拓扑基，则称X满足第二可数性公理。

设在拓扑空间X中具有由开集构成的某一个集，记作$\tau=\{U_\alpha\}$（这里α是标志这些开集U_α的记号，假定α在某一集A的元素中变动，A的元素不一定是可数个）。如果取任意点$a\in X$，存在一个属于τ的U_α使$a\in U_\alpha$，就说τ形成X的一个开覆盖。

若X是满足第二可数性公理的拓扑空间，则只要给定X的任意开覆盖τ，从τ中选出可数个开集，就可以把X覆盖起来．如果只用其中有限个开集就能覆盖X，就称X为紧致拓扑空间。

如果一个拓扑空间X的每点具有一个邻域与某一n维欧氏空间的一个开子集同胚，就说X为局部欧氏的，n称为X的维数。

5．度量空间的完备化 设$\{a_n\}$（$n=1, 2, \cdots$）是拓扑空间X中一个无限点列．若有一点a，对a的每个邻域U有一个指数N与a对应，并当$n>N$时，$a_n\in U$，则称点列$\{a_n\}$是收敛的，或者说点列$\{a_n\}$收敛于极限点a，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a \quad \text{或者} \quad a_n\to a\ (n\to\infty).$$

若$\{a_n\}$是度量空间X的一个无限点列，并收敛于a点，则对任何$\varepsilon>0$必有正整数N，使得

$$d(a_n,\ a)<\frac{\varepsilon}{2},\quad n>N.$$

故由三角形不等式便得

$$d(a_m,\ a_n)<\varepsilon,\quad m,\ n>N.$$

使这个不等式成立的点列$\{a_n\}$称为 Cauchy 序列．不难证明，一个度量空间中一个收敛点列必为 Cauchy 序列，但是反过来未必成立。例如把一切有理数看作一维实数空间R^1的度量空间，则R^1中 Cauchy 序列就不收敛，这是因为它的极限可能是无理数。

特别，当空间X中任一Cauchy 序列都收敛时，则说X是完备的，或称X为完备空间。

紧致空间是完备空间．事实上，在所论的紧致空间X的各点a，考察以a为中心的球形邻域，设$S(a)$为其内部，则$S(a)$是开集，并且这些开集的全体$\{S(a)|a\in X\}$构成X的开覆盖．因而，由紧致性的假设，只用其中有限个开集就能覆盖X。现在把这有限个开集记作$S(a_1)$，$S(a_2)$，…，$S(a_k)$。

在X内任取一个无限点列，在这个点列中必有无限个的点属于这k个开集中的一个，比如$S(a_1)$，再把$S(a_1)$的边界点加进去，使成为闭集$\overline{S(a_1)}$；显然，在这个闭集内，这个无限子点列至少有一个极限点；因此，X的任一无限点列至少有一个极限点，所以X为完备空间。

6．微分流形　按照第2段中所述，有了数空间R^n，就有距离$d^2=\Sigma(x_i-y_i)^2\geqslant 0$，于是有极限、开集等概念，即有拓扑．$R^n$中更重要的是还有代数运算；向量的加法与数乘，即线性运算。因此，R^n a）是一个拓扑空间，并且b）是一个向量空间．从R^n推广到流形，希望能保持这两个性质．但是不可能完全保持。

拓扑性质可以保持，而代数性质则不然．由于流形上向量不能相加，于是引进切空间，这些下面要详细叙述。

上面我们已经讲过，R^n是一个度量空间，并有自然的拓扑．现在的问题是，如何推广R^n，引进流形的概念，使它基本上能保持R^n的这两个性质．现在给出微分流形的定义如下：

设X为一Hausdorff拓扑空间，并且有满足下列条件的补充结构：

1°对于X有一个有限或可数开覆盖$\{U_\alpha\}$，$\alpha\in A$，并对每个U_α和n维欧氏空间E^n的某一开区域D_α同胚，它对应的同胚设为

$$f_\alpha: U_\alpha\to D_\alpha.$$

2°若对于使$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$的任意两个开集$U_\alpha$，$U_\beta(\alpha，\beta\in A)$，映射

$$f_\beta\circ f_\alpha^{-1}: f_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to f_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

都是 C^r 函数，则称 X（和 $\{U_\alpha\}$： $\alpha\in A$）为 C^r n 维微分流形。

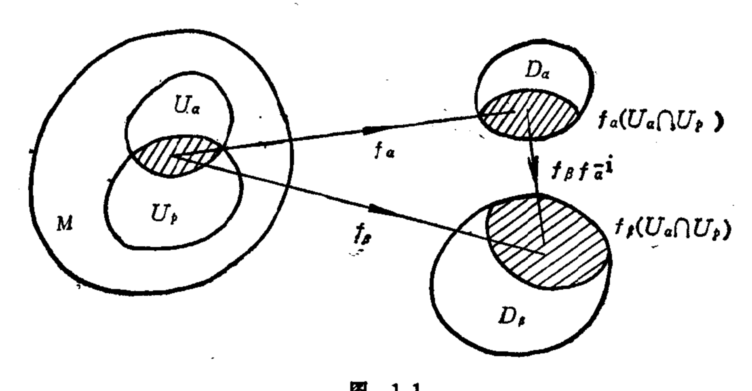


图 1.1

若映射 $f_\beta f_\alpha^{-1}$ 都是 C^∞ 的，则流形称为 C^∞ 的，或叫解析流形。

上述的补充结构称为 X 上 C^r-微分结构。

注意：定义中的映射

$$f_\beta\circ f_\alpha^{-1}: f_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to f_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

是一个同胚映射。因为这映射定义在 n 维欧氏空间的一个开集上，所以讨论它的微分性质是有意义的。

映射 f_α 在开集 U_α（$\alpha\in A$）中定义了坐标。因此，我们把每个 U_α 称为坐标邻域。坐标本身称为局部坐标，这样，对于每点 $P\in U_\alpha$，P 的局部坐标为 $x=(x^1,\ \cdots,\ x^n)$，其中 x^i 是点 $f_\alpha(P)$ 的第 i 个坐标（$i=1,\ \cdots,\ n$）。

每个序对（U_α，f_α）称为 X 在 P 点的坐标卡或在 P 点的局部坐标系，以后简称为卡（Chart）有时也叫图。卡的集称为 M 的卡集（atlas）。若 $f_\beta f_\alpha^{-1}\in C^\infty$（或 C^2，C^3，C^ω 等），则说卡（U_α, f_α）与（U_β, f_β）是相容的。

若 $P\in U_\alpha\cap U_\beta$，则 P 有映射 f_α 确定的局部坐标（x^1，$\cdots, x^n$）和映射 f_β 确定的局部坐标 $x'=(x^{1'},\ \cdots,\ x^{n'})$。映射 $f_\beta f_\alpha^{-1}$ 可写为

$x^{i'}=\varphi^{i'}(x^j)$　　（$\varphi^{i'}\equiv f_\beta f_\alpha^{-1}(x^j)$），一切的 $\varphi^{i'}$（$i'=1',\ \cdots,\ n'$）都是 C^r 函数（$r=1,\ \cdots,\ \infty,\ \omega$），又函数行列式

$$\det\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}}\right| \neq 0.$$

若函数行列式都大于0，则称微分流形是可定向的。

应当指出，虽然坐标邻域 $U_\alpha(\alpha\in A)$ 决定流形的微分结构，但一般来说，在一个微分流形中，还存在另外的坐标邻域。事实上，流形可以由完全不同的一组开集 $\{V_\beta\}$ 以及相应的一组坐标映射 $\{\varphi_\beta\}$ 来决定。我们称 $\{V_\beta\}$ 与 $\{U_\alpha\}$ 为等价坐标系；若以 $\{V_\beta\}$ 代替 $\{U_\alpha\}$，我们认为所决定出来的微分流形是相同的。

例 1 取 E^n 作为 X，把单个的 E^n 看作一组 $\{U_\alpha\}$，从 E^n 到 E^n 的恒等映射当做 f_α，则显然1°，2°都成立，所以 E^n 是一个 n 维解析流形。

例 2 取 E^3 中的一个单位球面 S：

$$x^2+y^2+z^2=1$$

在球面 S 上取两个部分，它们按下列条件来定义：

$$U_1:\ x^2+y^2+z^2=1,\quad z<\frac{1}{2};$$

$$U_2:\ x^2+y^2+z^2=1,\quad z>-\frac{1}{2}.$$

现在把 U_1 上一点 $P_1(x,y,z)$ 从球面 S 的北极 (0, 0, 1) 射影到赤道平面 $z=0$ 上一点 $P_1'(u,v,0)$，则经过简单计算，就得出这个映射（叫做球极平面射影）的方程：

$$u=\frac{x}{1-z},\qquad v=\frac{y}{1-z}$$

或即

$$x=\frac{2u}{1+u^2+v^2},\quad y=\frac{2v}{1+u^2+v^2},\quad z=\frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}.$$

若 $P_1(x,y,z)$ 在 U_1 上变动，则不难知道，点 (u, v) 的轨迹是在圆

$$u^2+v^2<3$$

的内部，所以 U_1 可以考虑作一个坐标邻域，(u,v) 为 P_1 的局部坐

标。同样地，如果把U_2上一点$P_2(x, y, z)$从球面S的南极（0, 0, −1）射影到赤道平面$z = 0$上一点$P_2'(u', v', 0)$，我们有这个映射的方程

$$u' = \frac{x}{1+z}, \quad v' = \frac{y}{1+z}$$

或即

$$x = \frac{2u'}{1+u'^2+v'^2}, \quad y = \frac{2v'}{1+u'^2+v'^2}, \quad z = \frac{1-u'^2-v'^2}{1+u'^2+v'^2},$$

当P_2在U_2上变动，则点（u', v'）的轨迹也在圆

$$u'^2+v'^2 < 3$$

的内部。所以U_2也可以考虑作另一坐标邻域，(u', v')为P_2的局部坐标。

由此可见，球面S可以考虑作由两个邻域U_1和U_2构成，又U_1与U_2的公共部分$D = U_1 \cap U_2$，这就是球面S包含在两平面$z = \frac{1}{2}$与$z = -\frac{1}{2}$之间的部分，并在这个部分D中，球面上的一点P对应于平面上的两点$R_1(u, v)$，$R_2(u', v')$。从上面所列出的公式，不难推出它们之间的关系式：

$$u' = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad v' = \frac{v}{u^2+v^2},$$

$$u = \frac{u'}{u'^2+v'^2}, \quad v = \frac{v'}{u'^2+v'^2}.$$

对于D内的点，因为$u^2+v^2 > 0$，$u'^2+v'^2 > 0$，所以这个变换在D中满足可逆和解析的条件，从R_1到R_2的变换是幂为1，极在原点的一个反演；因而u'，v'为（u, v）的函数，而且具有任意阶连续导数，所以S为一个C^∞解析流形。

例 3 设y^1, …, y^{n+1}为$n+1$维欧氏空间E^{n+1}的笛氏坐标，设$F(y^1, \cdots, y^{n+1})$为y^1, …, y^{n+1}的C^r函数，又X为满足

$$F(y^1, \cdots, y^{n+1}) = 0$$

的非空的点集，且在X的每点上$\frac{\partial F}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial y^{n+1}}$中至少有一

不为零，则X就是一C^r微分流形。事实上，设$P_0(y_0^1, \cdots, y_0^{n+1})$为$X$上的点，不妨设在$P_0$，$\frac{\partial F}{\partial y^{n+1}} \neq 0$，因此在$E^{n+1}$中存在以$P_0$为中心的一个开球$W$，使得$X$在$W$中的点都可表为

$$y^{n+1}=f(y^1, \cdots, y^n),$$

且$\frac{\partial F}{\partial y^{n+1}} \neq 0$，不妨把$y^1, \cdots, y^n$的变化范围限制在$n$维空间的一个球域内。这样，我们就得到一个开集$U$，把它按$y^{n+1}$轴的方向射影到平面$y^{n+1}$上，我们得到$U$与$E^n$的区域的一个同胚。对$X$的每点$P$，都可作出这样的邻域，只不过有时必须用另外的$y^i$来代替上面所用的$y^{n+1}$。由欧氏空间的点集的性质，用有限或无限可列个$U$就可盖住$X$。设$U_1, U_2$为其中的两个开集，且$U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$，如果$U_1$，$U_2$都用沿同一$y^i$轴射影到平面$y^i=0$为其坐标的选取法，则变换的方程化为$y^{j'}=y^j(j' \neq j)$，显然属于$C^r$，且$\left|\frac{\partial y'}{\partial y}\right|=1$。如果$U_1$，$U_2$是沿不同的坐标轴的射影来定义坐标的，不妨设$U_1$是按$y^{n+1}$轴射影的，$U_2$是按$y^n$轴射影的，$U_1$的坐标记为$y^1, \cdots, y^n$，$U_2$的坐标记为$y^{1'}, \cdots, y^{n'+1'}$。对于$U_1 \cap U_2$中的点显然成立

$$y^{1'}=y^1, \cdots, y^{n'-1'}=y^{n-1}, y^{n'+1'}=f(y^1, \cdots, y^n).$$

这些函数显然为C^r的，且

$$\left|\frac{\partial y'}{\partial y}\right|=\frac{\partial y^{n'+1'}}{\partial y^n}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y^n}}{\frac{\partial F}{\partial y^{n+1}}}.$$

由于在U_1中$\frac{\partial F}{\partial y^{n+1}} \neq 0$，所以这个等式有效；又在$U_2$中$\frac{\partial F}{\partial y^n} \neq 0$，所以行列式$\frac{\partial y'}{\partial y} \neq 0$。因此$X$是$n$维微分流形。特别是容易验证，$E^{n+1}$中的单位球面

$$(y')^2+\cdots+(y^{n+1})^2=1$$

可按上述方式给与C^ω解析结构成为C^ω微分流形。

同样地，若给定的方程组

$$F_\sigma(y^1, \cdots, y^m) = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, s)$$

定义了非空点集X，F_σ为C^r函数，且对X上每点，矩阵

$$\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial y^a}\right)$$

的秩为s，则也可类似于上述方法定义出微分结构而成为$m-s$个组的C^r微分流形。

例 4 在C^{r+1} n维微分流形X中，每个坐标邻域内设有两点$P(x^i)$和$P'(x^i+dx^i)$，它们的距离ds决定于正定二次微分形式

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j,$$

其中$g_{ij}(x)=g_{ji}(x)$为C^r函数，称X为C^r n维 Riemann 流形或 Riemann空间，这个空间的几何叫做 Riemann 几何，并称$g_{ij}(x)\,dx^i dx^j$为 Riemann空间的基本度量形式，又称为 Riemann 度量。

例 5 实射影空间$P^n(R)$。令$X=R^{n+1}-\{0\}$，即一切除$(0, \cdots, 0)$外的$n+1$个实数组$x=(x^1, x^2, \cdots, x^{n+1})$的全体。

设x, $y\in R^{n+1}-\{0\}$，称x，y是等价的，如果有$\lambda\in R$，使$x=\lambda y$，即$(x^1, \cdots, x^{n+1})=(\lambda y^1, \cdots, \lambda y^{n+1})$。由$x$决定的等价类记作$[x]=[x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}]$。等价类$[x]$直观地可以看作是通过原点的一切直线构成的空间，现在要证

$$P^n(R)=\{[x] \mid x\in R^{n+1}-\{0\}\}$$

是一个n维解析流形。为此，在P^n中引进一组卡

$$U_i=\{[x^1, \cdots, x^{n+1}] \mid x^i\neq 0\} \qquad (1\leqslant i\leqslant n+1)$$

$$f_{U_i}(x^1, \cdots, x^{n+1})=({}_i\xi^1, \cdots, {}_i\xi^{i-1}, {}_i\xi^{i+1}, \cdots, {}_i\xi^{n+1}),$$

式中${}_i\xi^h=x^h/x^i$ $(h\neq i,\ 1\leqslant h\leqslant n+1)$。

在$U_i\cap U_j$中，有

$${}_j\xi^h={}_i\xi^h/{}_i\xi^j \qquad (h\neq i, j),\quad {}_j\xi^i=1/{}_i\xi^j.$$

坐标变换都是有理函数，所以P^n是n维解析流形，这是流形作为$\{R^{n+1}-\{0\}\}$的商空间的例子。

7. 微分映射 设M_1和M_2为任意给定的两个微分流形。考虑一个映射$\varphi: M_1 \to M_2$。若对定义在一个$V \subset M_2$上的每个函数g，使得$g \circ \varphi$是M_1上一个可微函数，记作$\varphi^* g$，即

$$\varphi^* g = g \circ \varphi, \tag{1.1}$$

则称φ为一个微分映射。因此，φ^*把定义在M_2的子集上的函数空间映到定义在M_1的子集上的函数空间。

若$\psi: M_2 \to M_3$，则从（2.1）推出

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*, \tag{1.2}$$

就是说：若$\varphi: M_1 \to M_2$和$\psi: M_2 \to M_3$都是微分映射，则$\psi \circ \varphi: M_1 \to M_3$也是微分映射。

微分映射φ可用局部坐标表达如下：设M_1和M_2的维数分别为n和m，并设$x^1, \cdots, x^n$为$P \in M_1$的局部坐标，$x^{1'}, \cdots, x^{m'}$为$\varphi(P) \in M_2$的局部坐标，则φ是一个微分映射的充要条件是$x^{i'}(\varphi(x^1, \cdots, x^n)) = x^{i'}(x^1, \cdots, x^n)$为$x^1, \cdots, x^n$的可微函数。

若在一点$P(x^1, \cdots, x^n) \in M_1$的Jacobi矩阵

$$\left\| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right\|_{(x^1, \cdots, x^n)} \quad (i = 1, \cdots, n;\ i' = 1', \cdots, m')$$

的秩等于r，则称映射φ的秩为r，记作$\operatorname{rank} \varphi = r$。

若在M_1的一切点处，一个微分映射$\varphi: M_1 \to M_2$的秩r都等于M_1的维数n，则称φ为一个浸入（immersion）。

若一个浸入φ是一个同胚，则称φ为一个嵌入（imbedding）。若一个浸入φ和2.1都是可微的同胚映射，则称φ为一个微分同胚（diffeomorphism）。自然，这时$m = n$，M到自身的同胚映射叫做M的微分变换（或简称为变换）。

因此一个嵌入是一个一对一的浸入，但不是每个一对一的浸入都是嵌入。

§1.2. 切空间及余切空间．向量

1. 切向量．切空间 我们考察微分流形M的一个坐标邻域U

中一点$P(x_0^i)$。通过P点而落在U中的C^1曲线是指借方程

$$x^i=x^i(t),\ 0\leqslant t\leqslant t_1;\ x^i(0)=x_0^i\quad (i=1,\cdots,n)\qquad (2.1)$$

所确定的点集。设在P点给定某一方向，它可用通过P点和这个方向相切的一条曲线（2.1）来确定。若t充分地小，则(2.1)可写为

$$x^i=x^i(t)=x_0^i+\xi^i t+\cdots\qquad (i=1,\cdots,n),\qquad (2.1)'$$

未写出的项表示关于t至少是二次项的总和。把$(2.1)'$求导，得

$$\left(\frac{dx^i}{dt}\right)_0=\xi^i\ (i=1,\ \cdots,\ n),\qquad (2.2)$$

这些数ξ^i的比值完全确定已知的方向，设$f(x)$为在P点定义的一个可微函数，它沿着方向（2.2）的导数为

$$\left[\frac{d}{dt}f(x(t))\right]_0=\xi^i\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_P,\qquad (2.3)$$

这里右边的相同指标i上下各出现一次，表示i从1到n作和。以后若无特殊声明，都采用这种规定。（2.3）中右下角的附标P表示括弧内的函数在P点取值。

我们把在P点有定义的一切C^∞函数的全体记作$F^\infty(P)$，把公式（2.3）中 $X=\xi^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$（在$P$点取值）作为$F^\infty(P)$上一个算子，它具有实数值，我们就称$X$为在$P$点的**切向量**，其中$\xi^i$是实常数，由于这个定义与坐标系有关，因此有必要给出切向量的另一特征如下：

定理1.1 曲线$x(t)$在P点的切向量是由

$$Xf=\left[\frac{d}{dt}f(x(t))\right]$$

定义的$F^\infty(P)$到实数域R上一个映射X。换言之，Xf是f沿着曲线$x(t)$在$t=0$的方向上的导数。其充要条件是：

1° 向量X在R上是线性的：

$$X(af+bg)=aXf+bXg,\ f,g\in F^\infty(P);\quad a,b\in R.\qquad (2.4)$$

2° $X(fg)=(Xf)g+f(Xg)$

$$f,g\in F^\infty(P). \tag{2.5}$$

每个切向量满足（2.4）和（2.5）是显然的；条件2°正是乘积的微分法则，称之为Leibniz法则。反之，假定X满足1°，2°，并设$C\in F^\infty(P)$是一个常数，则

$$XC=C\cdot X1=C\cdot X1\cdot 1=C(1\cdot X1+1\cdot X\cdot 1)=2XC,$$

由此可见，$XC=0$。现设$f\in F^\infty(P)$；则由Taylor定理，在P点邻近，可把f表成

$$f(x)=f(x_0)+a_i(x^i-x_0^i)+(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)\alpha_{ij}(x),$$

式中$\alpha_{ij}\in F^\infty(P)$，$a_i=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right)_P$。把$X$作用在$f(x)$上，并利用（2.4），便得

$$\begin{aligned}Xf=Xf(x_0)+a_i\cdot X(x^i-x_0^i)\\+X((x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)\alpha_{ij}(x)),\end{aligned}$$

式中$Xf(x_0)=0$（因$f(x_0)$是常数）。再按条件2°，便有

$$\begin{aligned}X((x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)\alpha_{ij}(x))&=X(x^i-x_0^i)[(x^j-x_0^j)\alpha_{ij}(x)]_P\\&+X(x^j-x_0^j)[(x^i-x_0^i)\alpha_{ij}(x)]_P\\&+[(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)]_PX(\alpha_{ij})=0.\end{aligned}$$

因此，对一切$f\in F^\infty(P)$成立

$$Xf=Xx^i\cdot a_i=Xx^i\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_P,$$

若令$\xi^i=Xx^i$，则上式变为

$$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.6}$$

所以X是一个切向量。　　　　证毕。

从上面的证明可知，关于一个给定的坐标系(x^i)，任何一个切向量可表为（2.6）或

$$X=Xx^i\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.6$'$}$$

若X_1和X_2是在P点的两个切向量，a_1，$a_2\in R$，则由

$$(\alpha_1 X_1 + a_2 X_2) f = a_1 X_1 f + a_2 X_2 f$$

确定的$a_1 X_1 + a_2 X_2$也是在P点的切向量；由此可见，在P点的所有切向量构成一个实线性空间，称为流形M在P点的切空间，记作$T_p(M)$。n个数$\xi^1, \cdots, \xi^n$称为向量X关于局部坐标系的支量或坐标。

定理1.2 设x^1，…，x^n是在P的坐标邻域U内一个坐标系，则切向量$\frac{\partial}{\partial x^1}$，…，$\frac{\partial}{\partial x^n}$构成切空间$T_p(M)$的一个基底，通称为自然基底。

证 算子$\frac{\partial}{\partial x^i}: f \to \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_P$显然是属于$T_p(M)$的，从方程(2.6)可知，$\frac{\partial}{\partial x^1}$，…，$\frac{\partial}{\partial x^n}$张成$T_p(M)$。现在要证明$\frac{\partial}{\partial x^1}$，…，$\frac{\partial}{\partial x^n}$是线性无关的；如果它们之间存在一个线性关系，比如

$$X \equiv \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0, \tag{2.7}$$

因为第j个坐标x^j属于$F^\infty(P)$，把X作用在x^j上，便得

$$0 = X x^j = \xi^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \xi^j \qquad (j = 1, \cdots, n),$$

因而(2.7)中的系数都是零，这就完成了定理的证明。

现在假定P为两个坐标邻域U，U'的公共区域$U \cap U'$中一点，则在U'中的曲线可表为

$$x^{i'} = x^{i'}(x(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_2 (\leqslant t_1),$$

并有关系式

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)_P,$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = a^i_{i'} \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{2.8}$$

式中 $a^i_{i'}=\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)_P$ 是变换方程的Jacobi矩阵，所以一切坐标变换，在切空间 $T_p(M)$ 内，都是线性变换。

关系式(2.6)给出任一向量 $X\in T_p(M)$ 以基底向量 $\frac{\partial}{\partial x^i}(P)$ 表达的一个显式表示式。若 $P\in U\cap U'$，则关于坐标 $x^{i'}$，我们有

$$X=\xi^{i'}\frac{\partial}{\partial x^{i'}}=\xi^{i'}\ a^i_{i'}\frac{\partial}{\partial x^i}=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\quad (应用\ (2.6),\ (2.8)),$$

式中

$$\xi^i=a^i_{i'}\xi^{i'}, \tag{2.9}$$

这是一个向量的支量 ξ^i 所满足的一个变换规律。ξ^i叫做一个逆变向量的支量或坐标。

2. 余切空间 从上述这个结论很清楚地知道，我们应该如何来制作协变向量作为 $T_p(M)$ 的对偶空间的元素。为此，我们考虑一切线性映射 ω：$T_p(M)\to R$ (R：实数域) 的集合。以 $\omega(X)$ 或 $\langle\omega, X\rangle$ (这两个记号今后都将采用) 表示任一向量 $X\in T_p(M)$ 在 ω 之下的象。这个集合是 $T_p(M)$ 的对偶，记作 $T^*_p(M)$，并称为 M 在 P 的对偶切空间或余切空间。由要求这个空间具有向量空间的结构：对一切 ω，$\lambda\in T^*_p(M)$，$X\in T_p(M)$，$a\in R$，

$$\langle\omega+\lambda, X\rangle=\langle\omega, X\rangle+\langle\lambda, X\rangle,$$

$$\langle a\lambda, X\rangle=a\langle\lambda, X\rangle. \tag{2.10}$$

对任何 $f\in F^\infty(P)$，现在定义 $T^*_p(M)$ 的一个元素，记作 df，它是这样一个映射 $T^*_p(M)\to R$，使得对一切 $X\in T_p(M)$，

$$df(X)\equiv\langle df, X\rangle=Xf, \tag{2.11}$$

特别，对 $P\in U$，给出某一图 (U, h)，令 $f=x^k$，对某一个 k ($k=1, \cdots, n$)，则 (2.11) 变为

$$\langle dx^k, X\rangle=Xx^k, \tag{2.12}$$

并若把 X 与 $T_p(M)$ 的一个基底向量 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 等同起来，则有

$$\left\langle dx^k, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} = \delta^k_i. \tag{2.13}$$

因此 $(dx^1, \cdots, dx^n)$ 是 $T_p(M)$ 的基底 $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ 的对偶，因而 $(dx^1, \cdots, dx^n)$ 是 $T^*_p(M)$ 的一个基底，所以任一元素 $\omega \in T^*_p(M)$ 关于给定的图可表为

$$\omega = \omega_i dx^i, \quad \omega_i \in R, \tag{2.14}$$

称 ω_i 为元素 $\omega \in T^*_p(M)$ 的**支量**或**坐标**。特别是，对 (2.11) 中所指的 $df \in T^*_p(M)$，现在可写为

$$df = \alpha_h dx^h. \tag{2.15}$$

因此，一方面，应用 (2.10) 和 (2.13)，便得

$$\left\langle df, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \alpha_h \left\langle dx^h, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \alpha_h \delta^h_i = \alpha_i,$$

而另一方面，借 (2.11) 看到

$$\left\langle df, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{2.16}$$

所以 $\alpha_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$，因而 (2.15) 可以用熟知的形式表达：

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^h} dx^h, \tag{2.17}$$

这表示 $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ 是 df 的支量，$T^*_p(M)$ 的元素称为在 P 的**微分**。

最后，关于任何其它坐标系 $x^{i'}$，(2.14) 的类似表达式为

$$\omega = \omega_{i'} dx^{i'}, \tag{2.18}$$

但是在 (2.17) 中，置 $f = x^{i'}$，便得

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i, \tag{2.19}$$

所以 (2.18) 可写为形式

$$\omega = \omega_{i'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i = \omega_i dx^i,$$

式中

$$\omega_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\omega_{i'}, \tag{2.20}$$

这是一个协变向量的支量所满足的变换规律。对偶切空间$T_p^*(M)$的向量叫做协变向量，因而切空间$T_p(M)$的向量有时叫做逆变向量。此外，若$X\in T_p(M)$和$\omega\in T_p^*(M)$关于基底$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$和$(dx^1, \cdots, dx^n)$的支量分别是$X^i$和$\omega_h$，则由(2.6)，(2.14)，(2.10)和(2.13)立刻推出

$$\langle\omega, X\rangle = \omega_h(X)X^i\left\langle dx^h, \frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle = \omega_h X^i \delta_i^h = \omega_i X^i \tag{2.21}$$

这与坐标系无关。

§1.3. 群的一些基本概念

1. 抽象群 设$G=(a, b, \cdots, x, y, z, \cdots)$为一非空集。当取$G$中的两个元素$x$，$y$时，假设已给定了把它们结合起来的法则。把结合元素记作xy。xy叫做x和y的积；且满足下列性质：

1° 若x，$y\in G$，则$xy\in G$；

2° 若x，y，$z\in G$，则$x(yz)=(xy)z$(乘法的结合律)；

3° 对一切的元素$x\in G$，必有元素$e\in G$，使$xe=ex=x$(e叫做么元)；

4° 对一切的元素$x\in G$，必有元素$x^{-1}\in G$，使$xx^{-1}=x^{-1}x=e$(x^{-1}叫做x的逆元)。

我们说：集G关于所考虑的结合法则做成一个抽象群或简称为群。

若群G对乘法是可交换的，则称G为可换群或Abel群。

2. 变换，变换群 在集$E=(\alpha, \beta, \cdots)$中的元素组成一对一的对应称为变换，记作

$$\alpha' = x(\alpha).$$

令 $\alpha = x^{-1}(\alpha')$。把元素 α 变到自己的变换叫做恒等变换或么变换。记作

$$\alpha = e(\alpha).$$

设 y 为另一变换，令

$$\alpha'' = y(\alpha') = y[x(\alpha)] = yx(\alpha),$$

而约定 α'' 是从 α 经过变换 yx 而得到的，称这个变换 yx 为两变换 x，y 的积。

当变换集 G 对上面所定义的积的结合满足下列条件时，称为变换群。

1）设 x，y 为 G 的任意两变换，则 xy 也是属于 G 的变换；

2）对 G 的任意变换 x，使

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

成立的变换 x^{-1} 必属于 G（称 x^{-1} 为 x 的逆变换）。

事实上，在变换集 G 中必含有恒等变换 e（即各元素和它自己对应的变换）；容易看出结合律是成立的。事实上，若 $\alpha' = x(\alpha)$，$\alpha' = y(\alpha)$，$\alpha' = z(\alpha)$ 是已知变换，则 $x(yz) = (xy)z$ 都表示变换 $\alpha' = x(y(z(\alpha)))$。所以变换群也满足抽象群的四个性质，因而对变换集是否构成一个群只要检验条件 1）和 2）是否满足就够了。

若在 G 中存在一个变换，把 E 的任一元素变到另一任意元素，就说 G 是可迁群；当对于 E 的一对元素仅有一个这样的变换时，说 G 是单纯可迁的。不可迁的群称为不可迁群。

若 H 是群 G 的一个子集，当 H 关于 G 中同一结合法则独自构成群时，则称 H 为 G 的一个子群。

例 1 运动群。设 n 维空间 R^n 中的点 x 与点 x' 的坐标之间满足如下的方程组：

$$x^{h'}=\sum a^h_j+b^h(h=1,2,\cdots,n),\tag{3.1}$$

式中a^h_j和b^h是参数，而且对于方阵（a^h_j）的各元素成立关系

$$\sum_{h=1}^{n} a^h_j a^h_k=\delta_{jk}=\begin{cases}0\ (j\neq k)\\ 1\ (j=k).\end{cases}\tag{3.2}$$

此外，行列式

$$\Delta=|a^h_j|=1,\tag{3.3}$$

变换（3.1）称为n维空间R^n中的运动。参数a^h_j和b^h的个数等于$n(n+1)$；关系（3.2）有$n(n+1)/2$个，因此运动有$n(n+1)/2$个参数。

我们容易看出，（a^h_j）的逆阵，记作（A^k_h），是它的转置：$A^k_h=a^h_k$；从此可以写出（3.1）的逆变换取如下的形式：

$$x^h=\sum_{j=1}^{n} a^j_h(x^{j'}-b^j)$$

此外，从几何明显地看出：两个运动的积也是一个运动，所以构成一个变换群，称为运动群，记作D^n。具有结构群D^n的空间R^n称为欧氏空间，记作E^n。

$b^h=0$的变换（3.1）的全体是运动群的一个子群，称为旋转群。

根据Klein的思想，有一个变换群G就有在G下作为不变式理论的一种几何。因此，在运动群之下研究图形不变性质的几何是欧氏几何。

例2 仿射群。设n维空间R^n中的点x与x'的坐标之间满足如形式（3.1）的方程，但式中的参数只满足唯一的条件$\Delta=|a^h_j|>0$。满足这个条件的变换（3.1）称为R^n中的仿射变换。我们容易检验仿射变换的全体构成一个群，称为仿射群，记作A_n。具有结构群A_n的空间R^n称为仿射空间，记作A^n。

在仿射群之下研究图形不变性质的几何称为仿射几何。

例3 射影群。考虑由$n+1$个不全为零的实数构成的一个组（x^h）（$h=1,2,\cdots,n+1$），作为n维无定形射影空间P^n

的解析点。若两个解析点 (x^h) 和 ($x^{h'}$) 满足关系式

$$\frac{x^1}{x^{1'}}=\frac{x^2}{x^{2'}}=\cdots=\frac{x^{n+1}}{x^{n'+1'}},$$

则决定同一个几何点。(若$x^h=0$，则也有 $x^{h'}=0$，反过来也一样。)无定形射影空间P^n是这种几何点的集。

因为一切的x^h不全为零，比如$x^{n+1}\neq 0$，假定$x^{n+1}=1$，则可决定对应的几何点。

在射影空间P^n中导入变换群

$$x^{h'}=\sum_{h=1}^{n+1} a_k^h x^k, \tag{3.4}$$

而行列式

$$\Delta=|a_k^h|\neq 0, \tag{3.5}$$

变换 (3.4) 的全体就是 n 维射影群。具有这种结构群的空间称为射影空间。

这个群依赖于 $(n+1)^2-1=n(n+2)$ 个参数。

在射影群之下研究图形不变性质的几何称为射影几何。

3．李群．连续变换群 假设群的一切变换由参数$a^1, a^2, \cdots, a^n$来确定．使这些参数具有值$x^1, x^2, \cdots, x^r$时，我们就得到一个变换X；使同一些参数具有新值$y^1, y^2, \cdots, y^r$时，得到另一个变换Y．按照这些变换结合的条件$Z=XY$是群的一个变换，这就是说，我们得到了确定的新参数值$z^1, z^2, \cdots, z^r$。值z^h($h=1, 2, \cdots, r$) 依赖于$x^1, x^2, \cdots, x^r$；$y^1, y^2, \cdots, y^r$；即得到了依赖于这些参数的一些函数：

$$z^h=\theta^h(x^1,\cdots,x^r|y^1,\cdots,y^r) \quad (h=1,2,\cdots,r) \tag{3.6}$$

或缩写为

$$z^h=\theta^h(x|y)。 \tag{3.6$'$}$$

若一个群的元素连续地依赖于有限参数组的值，而结合律是借助于可微两次的函数$\theta^1, \theta^2, \cdots, \theta^r$来表示，则称这个群为李群．这是以最早研究这种群的挪威数学家S. Lie来命名的。

十九世纪前半期，Лобачевский 讨论了一种新几何系统，今称为罗氏几何。同时射影几何形成一个独立的几何系统；稍后建立了Riemann几何。因此，到十九世纪后半期，从研究“现实世界的空间形式”的种种观点出发，可以产生一系列独立的几何系统。要把一切这些系统在同一观点下统一起来，但要保留它们最重要的质的差异，是借助于群论来实现的。

考虑某个几何空间点集的一一变换，它们不改变已知几何系统中图形间的一些基本关系。这些变换的全体构成一个群，通常叫做已知几何系统的自同构群。自同构群完全刻划了已知几何系统，因为若群已知，就确定了相应的几何，它研究点集在给定群的变换下保留不变的性质。不同的几何系统按其自同构群的分类方法，就是上面已经指出的Klein的思想（1872）。所有在上世纪实际研究过的几何系统，它的自同构群都是李群。正如上面所指出的运动群、仿射群和射影群都是李群。本书所讨论的基本内容就是研究在上述三种群之下的微分几何，就是欧氏微分几何、仿射微分几何和射影微分几何。

§1.4. 外 代 数

1. p-向量空间 设R表示实数域a，b，c，…；L表示R上一个n维向量空间，它的元素为α，β，…。

对于每个$p=0$，1，2，…，n我们将作出R上一个新的向量空间

$$\wedge^p(L)$$

叫做在L上p-向量空间。当$p=0,1$时就是

$$\wedge^0(L)=R,\quad \wedge^1(L)=L,$$

我们对$\wedge^2L$作简单的说明。这个空间是由如下形式的所有和组成的：

$$\sum a_i(\alpha_i\wedge\beta_i),$$

并服从下列规律：

$$(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2)\wedge\beta=a_1(\alpha_1\wedge\beta)+a_2(\alpha_2\wedge\beta),$$
$$\alpha\wedge(b_1\beta_1+b_2\beta_2)=b_1(\alpha\wedge\beta_1)+b_2(\alpha\wedge\beta_2), \tag{4.1}$$
$$\alpha\wedge\alpha=0,$$
$$\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha,$$

式中α，β，…是L的向量，a，b，…，是实数；$\alpha\wedge\beta$叫做向量α和β的外积。若α和β是线性相关的，比如$\beta=c\alpha$，则

$$\alpha\wedge\beta=\alpha\wedge(c\alpha)=c(\alpha\wedge\alpha)=c\cdot 0=0.$$

否则$\alpha\wedge\beta\neq 0$。

假定σ^1，…，σ^n为L的一个基底，则

$$\alpha=a_i\sigma^i,\quad \beta=b_j\sigma^j,$$
$$\alpha\wedge\beta=a_i\sigma^i\wedge b_j\sigma^j=a_ib_j(\sigma^i\wedge\sigma^j),$$

把它重新排列如下：每项$\sigma^i\wedge\sigma^i=0$和每个$\sigma^j\wedge\sigma^i=-\sigma^i\wedge\sigma^j$（$i<j$）。从此

$$\alpha\wedge\beta=\sum_{i<j}(a_ib_j-a_jb_i)\sigma^i\wedge\sigma^j, \tag{4.2}$$

由于$\wedge^2L$的每个元素是这种外积的一个线性组合，所以2-向量（或二重向量）构成$\wedge^2L$的一个基底。由此推出它的维数：

$$\dim\wedge^2(L)=\frac{n(n-1)}{2}=C_n^2.$$

一般地，引用同样的概念来作出$\wedge^p(L)$（$2\leqslant p\leqslant n$）。它是由如下形式的一切p-向量，或p重向量的和组成的：

$$\Sigma a(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p),$$

并且服从下列规律：

1° $(a\alpha+b\beta)\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_p=a(\alpha\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_p)+b(\beta\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_p)$，并若任一$\alpha_i$用一个线性组合代替，这个等式也成立。

2° 若对某一对指标$i\neq j$，$\alpha_i=\alpha_j$，则$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p=0$。

3° 对调任意两个α_i，则$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p$变号。

从1°容易推出$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p$关于每个变数是线性的；我们把其中任一变数用任意个（不仅两个）其它向量的一个线性组合来代替并用分配律计算其值，例如

$$\alpha\wedge(b_1\beta_1+b_2\beta_2+b_3\beta_3)\wedge\gamma\wedge\delta$$
$$=b_1(\alpha\wedge\beta_1\wedge\gamma\wedge\delta)+b_2(\alpha\wedge\beta_2\wedge\gamma\wedge\delta)$$
$$+b_3(\alpha\wedge\beta_3\wedge\gamma\wedge\delta).$$

从 3° 推出，若 π 是 $\{1, 2, \cdots, p\}$ 的任一排列，则

$$\alpha_{\pi(1)}\wedge\cdots\wedge\alpha_{\pi(p)}=(\mathrm{sgn}\pi)\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p, \tag{4.3}$$

式中 $(\mathrm{sgn}\pi)$ 表示 π 的符号，即 π 为偶排列时为 $+1$，奇排列时为 -1，与 $p=2$ 的情形类似，我们可以证明，若

$$\sigma^1, \cdots, \sigma^n$$

是 L 的一个基底，则可作出 $\wedge^p(L)$ 的一个基底如下：对于每组指标

$$H=\{h_1, h_2, \cdots, h_p\},\ 1\leqslant h_1<h_2<\cdots<h_p\leqslant n,$$

我们令

$$\sigma^H=\sigma^{h_1}\wedge\cdots\wedge\sigma^{h_p},$$

则 σ^H 的全体为 $\wedge^p(L)$ 的一个基底。由此推出

$$\dim\wedge^p(L)=C_n^p,$$

就是从 n 个东西中每次取 p 个的组合。特别是

$$\dim\wedge^n L=1.$$

若 $\lambda\in\wedge^p(L)$，则

$$\lambda=\sum_H a_H\sigma^H=a_H\sigma^H, \tag{4.4}$$

这里取遍这些有序组 H 作和。我们也可以对如下的 p 重指标作和，由导入反称系数：

$$\lambda=\frac{1}{p!}b_{h_1\cdots h_p}\sigma^{h_1}\wedge\cdots\wedge\sigma^{h_p}, \tag{4.4$'$}$$

式中 $b_{h_1\cdots h_p}$ 是一个反称张量，而且

$$b_{h_1\cdots h_p}=a_H \text{对} H=\{h_1, \cdots, h_p\},\ h_1<h_2<\cdots<h_p.$$

这个反称表示法是经常有用的。表达式 (4.4) 或 (4.4)′ 叫做 p 次外形式。$p=1$ 时，就是线性形式，$p=n$ 时，只有一项，它总可表为如下的形式

$$c\sigma^1\wedge\cdots\wedge\sigma^n,$$

其中 c 为一常数。

现在指出为什么当$p>n$时不能定义$\wedge^p L$。(有时为方便起见，对$p>n$时，就令$\wedge^p L=0$。)我们把积$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p$中每个$\alpha$以基向量$\sigma^1$，…，$\sigma^n$的一个线性组合来表达，并按规律1°完全地分配出来，则导出

$$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p=a_{h_1\cdots h_p}\sigma^{h_1}\wedge\cdots\wedge\sigma^{h_p},$$

式中每项$\sigma^{h_1}\wedge\cdots\wedge\sigma^{h_p}$是从组$\sigma^1,\cdots,\sigma^n$中取出$p>n$个向量的一个积，所以必有重复的向量，因而由规律2°它等于零。由此可见，$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p=0$是唯一的可能性。

我们要证明下面一个常用的定理：

定理1.3 向量α_1，…，α_r是线性相关的一个充要条件是：

$$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_r=0\text{.}$$

证 若向量是相关的，则其中一个可以用其余的线性地来表示，比方说：

$$\alpha_r=\sum_{k=1}^{r-1}a_k\alpha_k\text{.}$$

因此

$$\begin{aligned}\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_r&=\alpha_1\wedge\cdots\wedge(\sum a_k\alpha_k)\\&=\sum a_k\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_{r-1}\wedge\alpha_k=0,\end{aligned}$$

这是由于右边每项有一个重复的因子。

另一方面，如果α_1，…，α_r是线性无关的，我们总可以添加$(n-r)$个向量$\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$，使$\alpha_1$，…，$\alpha_n$构成空间的一个基底，则$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n\neq0$，所以必有$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_r\neq0$。

2．外代数 我们来作出一个直和

$$\wedge(L)=\wedge^0(L)\oplus\wedge^1(L)\oplus\cdots\oplus\wedge^n(L),$$

于是$\wedge(L)$是一个向量空间，其基底为

$\sigma^H=\sigma^{h_1}\wedge\cdots\wedge\sigma^{h_p}$ ($h_1<h_2<\cdots<h_p$; $p=0, 1, \cdots, n$),

因而它的维数为

$$\sum_{p=0}^{n}C_n^p=2^n\text{.}$$

在$\wedge(L)$上按法则

$$(\sigma^{h_{i_1}}\wedge\cdots\wedge\sigma^{h_{i_r}})\wedge(\sigma^{h_{j_1}}\wedge\cdots\wedge\sigma^{h_{j_s}})$$
$$=\sigma^{h_{i_1}}\wedge\cdots\wedge\sigma^{h_{i_r}}\wedge\sigma^{h_{j_1}}\wedge\cdots\wedge\sigma^{h_{j_s}}$$
$$(h_{i_1}<\cdots<h_{i_r};\ h_{j_1}<\cdots<h_{j_s}) \quad (4.5)$$

来定义乘法。当$r+s\leqslant n$时，右边已定义好；当$r+s>n$时，则右边等于零。对$\wedge(L)$的基底元素，其乘法由(4.5)定义好；再利用线性性质，在整个$\wedge(L)$上来定义乘法。特别，若把$h_{i_1}\cdots$，h_{i_r}重新排列，按照这是偶排列，还是奇排列，(4.5)的两边乘上$+1$或-1，对$h_{j_1},\cdots,h_{j_s}$也一样。因此，当指标不一定是上升数列时，(4.5)仍旧成立。有两个h_i或两个h_j相等时，则(4.5)两边都等于零；所以不管指标如何选取，(4.5)总是成立的。

由(4.5)，不难验证$\lambda\wedge\mu=(-1)^{rs}\mu\wedge\lambda$，$r$，$s$分别为$\lambda$，$\mu$的次数。

现在来验证乘法(4.5)满足结合律，就是说$\wedge(L)$是一结合代数。

因为若令$H=\{h_1,\ \cdots,\ h_q\}$，$I=\{i_1,\ \cdots,\ i_r\}$，$J=\{j_1,\ \cdots,\ j_s\}$，则

$$(\sigma^H\wedge\sigma^I)\wedge\sigma^J=\sigma^{HIJ}=(\sigma^H\wedge\sigma^I\wedge\sigma^J),$$

再根据线性性质，便知结合律在整个$\wedge(L)$上成立。$\wedge(L)$的单位元素1是$\wedge^0(L)$的唯一的基底元素。$\wedge^1(L)$的基底$\sigma^1,\cdots,\sigma^n$和1合并起来构成$\wedge(L)$的一组母元素，这是因为$\wedge(L)$的每个元素是元素

$$\sigma^{I_p}=\sigma^{i_1}\wedge\cdots\wedge\sigma^{i_p} \qquad (p=0,1,\cdots,n)$$

的线性组合。

以后我们称$\wedge(L)$为向量空间L上的**外代数**。$\wedge(L)$中的乘法称为**外乘法**。

我们已经引用明显的方法定义了一个向量空间的外代数，现在要阐述也可用另一种更常用的方式来定义它。这种方式对以后

的应用特别方便。

定理1.4 设L是一个向量空间，$\wedge(L)$是它的外代数，则$\wedge(L)$与具有单位元素的一个结合代数同构．后者是以L的基底元素为生成元且其乘法具有定义关系

$$v\wedge v=0 \quad (v\in L).$$

若L的维数是n，则$\wedge(L)$的维数为2^n。

证　令v_1，…，v_n为L的一个基底，F是具有单位元素的结合代数，它的生成元为$v_1, \cdots, v_n$，并有定义关系$v\wedge v=0$ $(v\in L)$。因L的外代数$\wedge L$是一个具有单位元素的结合代数，其生成元为v_1，…，v_n，并满足$v\wedge v=0$，它必须是F在一个同态下的象。设K为F的一个同态核，$\wedge(L)\simeq F/K$，因而

$$\dim\wedge(L)=\dim F-\dim K. \tag{4.6}$$

现在以F_K表示F内用L的K个因子的乘积张成的子空间，于是

$$v_i\wedge v_i=0 \tag{4.7}$$

和$v_i\wedge v_j+v_j\wedge v_i=(v_i+v_j)\wedge(v_i+v_j)-v_i\wedge v_i-v_j\wedge v_j=0$，所以

$$v_j\wedge v_i=-v_i\wedge v_j, \tag{4.8}$$

这使我们能够在任何单项式

$$v_{i_1}\wedge v_{i_2}\wedge\cdots\wedge v_{i_p} \tag{4.9}$$

中对调任何相邻的因子，不过是变更符号而已．因此，按指标增序排列，至多变更这项的符号．若有两个指标相等，则为零．于是能把F_p的每个元素写成$v_{i_1}\wedge v_{i_2}\wedge\cdots\wedge v_{i_p}$的线性组合，其中指标为

$$i_1<i_2<\cdots<i_p.$$

因而这样的项恰好有C_n^p个，且F的维数至多是$\sum C_n^p=2^n$。我们已经看到：$\wedge L$的维数恰等于2^n，所以

$$\dim F\leqslant\dim\wedge L.$$

由此与(4.6)可知，$\dim K=0$，因而$K=0$，于是$\wedge(L)$和F同构。

现在要证明一个重要定理：

定理1.5(Cartan引理) 设α^1，…，α^p是线性无关的，并假定

$$\alpha^1\wedge\beta^1+\cdots+\alpha^p\wedge\beta^p=0, \tag{4.10}$$

则成立关系式

$$\beta^i=\sum_{j=1}^{p} c^i_j\alpha^j,\ c^i_j=c^j_i, \tag{4.11}$$

就是说，β^i是α^i 的线性组合，并且它的系数是对称的。

证　取α^{p+1}，…，α^n，使得α^1，…，α^n是线性无关的，则可写

$$\beta^i=\sum_{j=1}^{p} c^i_j\alpha^j+\sum_{j=p+1}^{n} d^i_j\,\alpha^j,$$

把这个表达式代入 (4.10)，便得

$$\sum_{i<j\leqslant p}(c^i_j-c^j_i)\,\alpha^i\wedge\alpha^j+\sum_{i\leqslant p,\ j>p} d^i_j\alpha^i\wedge\alpha^j=0.$$

但是，在第一段中已经指出，$\alpha^i\wedge\alpha^j(i<j)$ 构成$\wedge^2L$的基底，所以是线性无关的。因此，$d^i_j=0$ 和$c^i_j=c^j_i$。　　证毕。

§1.5. 外　导　数

1. 微分形式　在n维解析流形M上再考虑一点$P\in M$的协变向量的空间T^*_p。令U为包含P的一个邻域，坐标为 $(x^1,\ \cdots,\ x^n)$。自然基底为dx^1，dx^2，…，dx^n，则在P可以作出一个p形式

$$\omega=a_H dx^{h_1}\cdots dx^{h_p}\equiv a_H dx^H,\ a_H=a_H(x^1,\ \cdots,\ x^n). \tag{5.1}$$

注意，这里已经略去记号“$\wedge$”，所以微分dx^i并列相乘常指外乘。表达式 (5.1) 称之为在解析流形M上的一点P的邻域U上所定义的一个p次外微分形式，以后简称为p微分形式。当$p=1$时，通称为Pfaff形式或线性微分形式，记作

$$\omega(d)=\omega(x,\ dx)=a_i(x)dx^i. \tag{5.2}$$

为方便起见，称变数x^i的函数为0微分形式。

设ω和η分别是在U上的p形式和q形式，则$\omega\wedge\eta$是U上的一个（$p+q$）形式(自然,若$p+q>n$,则$\omega\wedge\eta=0$)。若

$$\omega=a_H dx^H,\qquad \eta=b_K dx^K, \tag{5.3}$$

则

$$\omega\wedge\eta=a_H b_K dx^H dx^K, \tag{5.4}$$

所以$\omega\wedge\eta$的系数是ω和η的系数的多项式。

例如在E^3中一个1形式

$$\omega=Pdx+Qdy+Rdz \tag{5.5}$$

可以与一个普通向量场（P，Q，R）等同，E^3中一个2形式

$$\alpha=Adydz+Bdzdx+Cdxdy \tag{5.6}$$

可以与E_3中的一个极向量场等同。

2. 外导数 以$F^p(U)$表示在U上的p形式的全体。特别是$F^0(U)$就是U上的解析函数集。

现在要建立一个运算d，它从每个p形式ω获得一个（$p+1$）形式$d\omega$。若在E^3上作这种运算，例如对于一个0形式f，

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

对于（5.5）所给定的1形式ω，作

$$d\omega=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \tag{5.7}$$

而对于（5.6）所给定的2形式α，有

$$d\alpha=\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dxdydz. \tag{5.8}$$

于是算子d包含普通的梯度、旋度和散度。

现在要在一个微分流形上确定一个算子

$$d:\ F^p(U)\longrightarrow F^{p+1}(U).$$

称为外微分算子d。

对每个ω，我们定义$d\omega$如下：

在一个坐标为（x^1，…，x^n）的坐标领域中，若ω是一p

形式，

$$\omega = a_H(x)dx^H,$$

则

$$d\omega = d(a_H dx^H) = (da_H)dx^H,$$

这里

$$da_H = \frac{\partial a_H}{\partial x^j} dx^j dx^H, \tag{5.9}$$

于是

$$d\omega = \frac{\partial a_H}{\partial x^j} dx^j dx^H. \tag{5.10}$$

$d\omega$ 称为 p （$1 \leqslant p \leqslant n$）形式 ω 的**外微分**或**外导数**。运算 d 称为**外微分法**。现在要来验证关于积的外导数的表达式

$$d(\lambda \wedge \mu) = d\lambda \wedge \mu + (-1)^p \lambda \wedge d\mu \text{（}p\text{ 为 }\lambda\text{ 的次数）}. \tag{5.11}$$

显然地，我们只要对单项式来证明这个表达式；因为任意的外微分形式总可以用若干个单项式的和来表达，并因乘法与算子 d 都是线性的，所以可推出一般情形。

设 $\lambda = a dx^H$，$\mu = b dx^K$。

则由（5.10），

$$\begin{aligned} d(\lambda \wedge \mu) &= d(ab\,dx^H dx^K) = \frac{\partial (ab)}{\partial x^i} dx^i dx^H dx^K \\ &= \frac{\partial a}{\partial x^i}\, b dx^i\, dx^H\, dx^K + a\,\frac{\partial b}{\partial x^i} dx^i dx^H dx^K \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i dx^H\right) \wedge (b dx^K) \\ &\quad + (-1)^p (a dx^H) \wedge \left(\frac{\partial b}{\partial x^i} dx^i dx^K\right) \\ &= (d\lambda) \wedge \mu + (-1)^p \lambda \wedge d\mu \text{（}p\text{ 为 }\lambda\text{ 的次数）}. \end{aligned}$$

这个符号 $(-1)^p$ 是从

$$dx^i dx^H = (-1)^p dx^H dx^i$$

产生的。这就证明了公式（5.11）。

对于任意的p形式

$$\omega=\sum_{h_1<\cdots<h_p} a_{h_1\cdots h_p}dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_p}. \qquad (5.12)$$

由线性性，$d\omega$定义为

$$d\omega=\sum_{h_1<\cdots<h_p}\frac{\partial a_{h_1\cdots a_{h_p}}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_p}. \qquad (5.13)$$

由此可见，对每n形式ω有$d\omega=0$。

（a）一个形式ω称为封闭的，如果$d\omega=0$。

（b）一个形式ω称为恰当的，如果存在一个形式π使得

$$d\pi=\omega.$$

现在要证明下面的定理：

每个恰当形式都是封闭的；即对每个ω有

$$d(d\omega)=0. \qquad (5.14)$$

证　因为d是线性的，我们只要考虑一个单项式。在一个坐标领域中，设

$$\omega=a(x_1,\ \cdots,\ x^n)dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_p},$$

则由（5.13），得

$$d(d\omega)=d\left[\left(\frac{\partial a}{\partial x^j}\right)dx^j\wedge dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_p}\right]$$

$$=\frac{\partial^2 a}{\partial x^j\,\partial x^i}dx^i\wedge dx^j\wedge dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_p}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^j\partial x^i}-\frac{\partial^2 a}{\partial x^i\partial x^j}\right)dx^i\wedge dx^j\wedge dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_p}$$

$$=0.$$

性质（5.14）无非是混合二阶偏导数的等式。这是在偏微分方程和微分几何中许多“可积条件”的来源。

$d(d\omega)=0$通常称为Poincaré引理。它的逆定理一般是不成立的。

定理1.6 设φ把流形$M_1 \to M_2$的一个微分映射，则

$$d\varphi^*(\omega)=\varphi^*(d\omega)。\qquad (5.14)'$$

证 只要对单项式来证明（5.14）。设

$$\omega = a dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_p}, \qquad (5.14)''$$

利用归纳法来证明：对零形式，即对函数，等式显然成立。设对小于p次的形式已成立。对于（5.14）″，

$$\begin{aligned} d\varphi^*\omega &= d\varphi^*(a dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_p}) \\ &= d\varphi^*(a dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_{p-1}})\wedge dx^{h_p}) \\ &= d\,(\varphi^*(a dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_{p-1}})\wedge\varphi^*(dx^{h_p})) \\ &= \varphi^*(da\wedge dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_{p-1}})\wedge\varphi^*(dx^{h_p})+0 \\ &\qquad\qquad (\text{由}(5.14)) \\ &= \varphi^*(da\wedge dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_p})=\varphi^*(d\omega) \end{aligned}$$ 证毕。

由此可见，算子d在微分映射下是不变的。

3. Stokes公式 在分析中，我们有熟知的Stokes公式：

$$\oint_L (Pdx+Qdy+Rdz)=\iint\limits_S\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\right\}, \qquad (5.15)$$

式中右边的积分是沿周线L所包围的简单曲面块S上的曲面积分，而左边的积分是沿周线L的线积分。

引用公式（5.5）和（5.7），Stokes公式（5.15）可以写成

$$\int_L \omega=\iint\limits_S d\omega. \qquad (5.16)$$

这个公式的正确性可从下面所述的关于无穷小的考虑得到。

考虑一条闭周线，它围绕曲面

$$x=x(u,\ v),\quad y=y(u,\ v),\quad z=z(u,\ v)$$

上某一区域，用坐标曲线而组成的四边形把积分区域分成许多小区域。为了沿周线进行线积分，可把沿每个小区域的积分累加起来，当沿内部分割线的积分相加时，两次取相反方向的两个积分

相消，因而得到沿区域周线的积分，但沿区域上的面积积分仍是累加起来。因此，只要对小区域来证明（5.16）即可。

为此先来介绍定向概念。

Stokes公式（5.16）要求预先选定沿周线的正向路径，且对面积积分，也要选定曲面的一侧为正向。

在曲面S的任一点处，可以任意选定一旋转正向。以P, P_1，P_2，P_3表示小区域的顶点，使沿u曲线的平移PP_1和沿v曲线的平移PP_2对应于微分符号

$$d=\alpha\frac{\partial}{\partial u},\quad \delta=\beta\frac{\partial}{\partial v},$$

$$\int_P^{P_1}=\omega(d),\quad \int_P^{P_2}=+\omega(\delta).$$

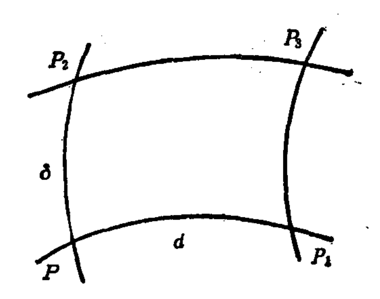


图 1.2

平移P_1P_3也是沿v曲线进行，而P_2P_3沿u曲线进行。但这时u或v已具有新值，因此可以假定

$$\int_{P_1}^{P_3}=\omega(\delta)+d\omega(\delta),\qquad \int_{P_3}^{P_2}=-\omega(d)-\delta\omega(d).$$

相加，便得沿周线的积分。

$$\int_{PP_1P_3P_2P}\omega=\omega(d)+\{\omega(\delta)+d\omega(\delta)\}+\{-\omega(d)-\delta\omega(d)-\omega(\delta)\}=d\omega(\delta)-\delta\omega(d),$$

这就是等式（5.16）右边的面积积分元素。若沿每条闭周线这积分都保持它的正向，则这样的曲面称为有定向的(双侧的)。

若给出曲面的每点附以一个二重向量，也可用来决定曲面的正向。

从曲面的定向不难转到周线的定向，若在周线上一点 P 处取第一个向量，使从 P 指向周线所围区域的外侧，而第二个向量指向周线切线的正向，若这样构成的二重向量对曲面上所选取的二重向量来讲是正的，则周线的正向和曲面的正向一致。

在分析中，我们还有熟知的 Gauss 公式：

$$\iint_S (A dy dz + B dz dx + C dx dy)$$

$$= \iiint_D \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx dy dz. \tag{5.17}$$

现在把这个公式推广到 n 维空间中去，在 n 维空间里考虑一个被二维曲面 S 包围的三维区域 D。若 ω 是 2-形式，则由（5.6）和（5.8）的类似式，公式（5.17）可写为

$$\iint_S \omega = \iiint_D d\omega,$$

假定区域 D 是有向的，与解析立方体同胚。定向可用构成坐标三棱形的三重向量来表示，三棱形的三轴的方向对应于区域 D 上 M 点的参数 u，v，w 的改变量 du，dv，dw 的正向（图 1.3）。

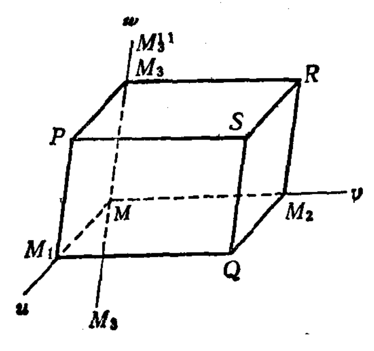


图 1.3

引进微分符号

$$d_1=\frac{\partial}{\partial u},\quad d_2=\frac{\partial}{\partial v},\quad d_3=\frac{\partial}{\partial w},$$

外微分$d\omega$可写成三重一次式

$$d\omega(d_1d_2d_3)=d_1\omega(d_2d_3)+d_2\omega(d_3d_1)+d_3\omega(d_1d_2).$$

按“平行六面体”$MM_1M_2M_3$的体积积分之后，得到

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{MM_1M_2M_3} d\omega(d_1d_2d_3)=&-\iint\limits_{MM_2RM_3}\omega(d_2d_3)\\&+\iint\limits_{MQSP}\omega(d_2d_3)+\iint\limits_{MM_1PM_3}\omega(d_3d_1)\\&-\iint\limits_{M_2QSR}\omega(d_3d_1)-\iint\limits_{MM_1QM_2}\omega(d_1d_3)\\&+\iint\limits_{M_3PSR}\omega(d_1d_2).\end{aligned}$$

符号一致规定：若二重向量MM_1M_2是负的，则三重向量$MM_3'M_1M_2$也是负的；又若二重向量M_3PR是正的，则三重向量$M_3M_3''PR$也是正的；余类推。这个变换可以推广到任意维数，设区域D是$p+1$维的，它的边界∂D是p维的。我们假定区域是可以定向的。即在每点给出标架向量的正的次序，然后从点到点连续推移，区域D的定向也给它的边界∂D带来定向，这意味着如果M点在边界∂D上，MT是外向向量，而MT_1，MT_2，…，MT_p都是p维流形F的内部向量，那末多重向量$MTT_1\cdots T_p$是正的，如果体积多重向量$MTT_1\cdots T_p$是正的，在这些条件下，

$$\int_{\partial D}^{(p)}\omega=\int_{D}^{(p+1)}d\omega. \tag{5.18}$$

4. Frobenius定理 在外微分法的许多应用中，我们会碰到由线性微分形式等于零所组成的全微分方程组。本段将简略地叙述这些方程组。为此，我们考虑n个变数x^i与一组m个变数t^α，这$n+m$个变数可以当作一个（$n+m$）维微分流形M^{n+m}（本节

的拉丁字母从1到n范围内变动，希腊字母从1到m范围内变动）的一个区域D的局部坐标。

取形式$x^j=x^j(t^\alpha)$的一个方程表示M^{n+m}的一个m维子空间（流形）C_m；例如，若$m=1$，这个子空间是一条曲线。更一般地，对于一组n个独立参数v^h，方程组

$$x^j=x^j(t^\alpha,\ v^h) \tag{5.19}$$

表示一个带n个参数的M^{n+m}的m维子空间族$C_m(v^h)$。假定(5.19)关于t^α和v^h分别为C^2类和C^1类函数，并假定这个族覆盖M^{n+m}的区域D，就是通过D内每点有族$C_m(v^h)$中一个子空间。后面这个假定是等于说n个方程（5.20）关于n个参数v^h是可解的：

$$v^h=g^h(t^\alpha,\ x^j). \tag{5.20}$$

设$P(t^\alpha,\ x^j)$为子空间$C_m(v^h)$上一点。从（5.26）推出在P切于$C_m(v^h)$的一个位移（dt^α，dx^j）必须满足条件

$$dx^j=b^j_\alpha dt^\alpha, \tag{5.21}$$

式中

$$b^j_\alpha=\frac{\partial x^j\ (t^2,\ v^h)}{\partial t^\alpha}, \tag{5.22}$$

这里的参数v^h在P点由（5.20）取值。在这个意义下，nm个函数(5.22)是由组（5.19)唯一的定义D上（t^ϵ，x^h）的C^1类函数：

$$b^j_\alpha=b^j_\alpha(t^\epsilon,\ x^h). \tag{5.23}$$

此外，这些函数关于坐标变换$x^{j'}=x^{j'}(x^h)$和$t^{\alpha'}(t^\epsilon)$分别是（1，0）型和（0，1）型张量。

反之，假定在D上给定一个形如（5.23）的C^1类张量场。借此可以定义关于x^j和t^ϵ的1-形式

$$\omega^j=dx^j-b^j_\alpha(t^\epsilon,\ x^h)dt^\alpha, \tag{5.24}$$

这里假定ω^j是线性无关的。若存在n个C^2类函数$x^j=x^j(t^\alpha,\ v^h)$代入ω^j而使ω^j恒等于零，则称n个全微分方程组

$$\omega^j=0 \tag{5.25}$$

是完全可积的。若$m>1$，完全可积可能的充要条件是b^j_α满足某

些条件，清楚地，由于（5.25）的可积性推出解 $x^j(t^\alpha, v^h)$ 必须满足

$$\frac{\partial x^j}{\partial t^\alpha}=b_\alpha^j(t^\epsilon,\ x^h),\tag{5.26}$$

这表示一个关于 n 个函数 $x^j(t^\epsilon, x^h)$ 的 mn 个偏微分方程的组。因此，当 $m>1$ 时，组（5.26）的方程的数目多于未知函数的数目。

方程组（5.26）的相容性的一个必要条件是容易求得的：因为，若（5.26）有一个 C^2 类的解 $x^j(t^\alpha, v^h)$ 是给定的，从(5.26)关于 t^β 微分然后代入（5.26）便得

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial t^\beta \partial t^\alpha}=\frac{\partial b_\alpha^j}{\partial t^\beta}+\frac{\partial b_\alpha^j}{\partial x^h}\ \frac{\partial x^h}{\partial t^\beta}=\frac{\partial b_\alpha^j}{\partial t^\beta}+\frac{\partial b_\alpha^j}{\partial x^h}b_\beta^h.\tag{5.27}$$

由于这个等式关于 α，β 是对称的，所以必有

$$P_{\beta\alpha}^j=0,\tag{5.28}$$

这里我们已令

$$P_{\beta\alpha}^j=\frac{\partial b_\alpha^j}{\partial t^\beta}-\frac{\partial b_\beta^j}{\partial t^\alpha}+\frac{\partial b_\alpha^j}{\partial x^h}b_\beta^h-\frac{\partial b_\beta^j}{\partial x^h}b_\alpha^h.\tag{5.29}$$

下面就会看到条件（5.28）也是使组（5.26）为完全可积的一个充分条件。事实上，我们要证明下面的定理，通称为 Frobenius定理：

定理1.7 具有 C^1 类系数 $b_\alpha^j(t^\epsilon, x^h)$ 的 n 个全微分方程组(5.25)是完全可积的一个充要条件是这些系数满足条件(5.28)。

证 （5.28）的必要性已证明过，为了证明充分性，在 D 内考虑某一固定点 (t_0^α, x_0^j)，并对 D 中任意点 (t^α, x^j)，我们写

$$t^\alpha=t_0^\alpha+\lambda^\alpha s,\tag{5.30}$$

这里 λ^α，s 为适当选定的参数。现在考虑 n 个常微分方程组

$$\frac{dx^j}{ds}=\lambda^\alpha b_\alpha^j(t_0^\epsilon+\lambda^\epsilon s, x^h),\tag{5.31}$$

根据这种方程的一般理论，我们断定：对适当的初始条件，(5.31)唯一地存在如下形式的 C^2 类解：

$$x^j=\varphi^j(s,\ \lambda^\epsilon,\ v^h),\tag{5.32}$$

这里的初始条件取作

$$x_0^j=\varphi^j(0,\ \lambda^\epsilon,\ v^h)=v^j, \tag{5.33}$$

已经选定的参数v^j，使得对 $t^\alpha=t_0^\alpha$时，$v^j=x_0^j$。

这些条件又包含

$$x_0^j=\varphi^j(\ s\ ,\ \ 0\ ,\ v^h)=v^j, \tag{5.34}$$

因为具$\lambda^\alpha=0$的（5.31）的解是常数。按定义，函数φ^j满足

$$\frac{\partial\varphi^j}{\partial s}=\lambda^\alpha b_\alpha^j(t_0^\epsilon+\lambda^\epsilon s,\ \ \varphi^h)。 \tag{5.35}$$

现在导入一组新的量w_α^j：

$$w_\alpha^j(s,\lambda^\epsilon,v^h)=\frac{\partial\varphi^j}{\partial\lambda^\alpha}-sb_\alpha^j(t_0^\epsilon+\lambda^\epsilon s,\varphi^h), \tag{5.36}$$

把（5.35）关于λ^α微分，然后把（5.36）代入：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi^j}{\partial\lambda^\alpha\partial s}&=b_\alpha^j+s\lambda^\beta\ \frac{\partial b_\beta^j}{\partial t^\alpha}+\lambda^\beta\frac{\partial b_\beta^j}{\partial x^h}\ \frac{\partial\varphi^h}{\partial\lambda^\alpha}\\&=b_\alpha^j+s\lambda^\beta\left(\frac{\partial b_\beta^j}{\partial t^\alpha}+\frac{\partial b_\beta^j}{\partial x^h}b_\alpha^h\right)+\lambda^\beta\frac{\partial b_\beta^j}{\partial x^h}w_\alpha^h。\end{aligned} \tag{5.37}$$

类似地，把（5.36）关于 s 微分，然后代入（5.37）：

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_\alpha^j}{\partial s}&=\frac{\partial^2\varphi^j}{\partial s\partial\lambda^\alpha}-b_\alpha^j-s\lambda^\beta\frac{\partial b_\alpha^j}{\partial t^\beta}-\ s\ \frac{\partial b_\alpha^j}{\partial x^h}\ \frac{\partial\varphi^h}{\partial s}\\&=\frac{\partial^2\varphi^j}{\partial s\partial\lambda^\alpha}-b_\alpha^j-s\lambda^\beta\left(\frac{\partial b_\alpha^j}{\partial t^\beta}+\frac{\partial b_\alpha^j}{\partial x^h}b_\beta^h\right)。\end{aligned} \tag{5.38}$$

把它加到（5.37），用（5.29）的记号来表达，便得

$$\frac{\partial w_\alpha^j}{\partial s}-\lambda^\beta\frac{\partial b_\beta^j}{\partial x^h}w_\alpha^h=s\lambda^\beta P_{\alpha\beta}^j。 \tag{5.39}$$

我们引用假设（5.28），则（5.29）化为

$$\frac{\partial w_\alpha^j}{\partial s}-\lambda^\beta\frac{\partial b_\beta^j}{\partial x^h}w_\alpha^h=0\ 。 \tag{5.40}$$

对参数λ^α,v^h的固定值，我们可以把(5.40)看作w_α^j(关于 s 的函数)的一个线性常微分方程组。但是从（5.36），我们推出对$s=0$，$w_\alpha^j=0$，因为由于（5.33），当$s=0$时，导数$\frac{\partial\varphi^j}{\partial\lambda^\alpha}=0$。因此，从线性组的一般理论，例如（5.40），推出对 s 的一切值，

$$w_{\alpha}^{j}=0。\tag{5.41}$$

由此 (5.46) 化为

$$\frac{\partial\varphi^{j}}{\partial\lambda^{\alpha}}=sb_{\alpha}^{j}(t_{0}^{\varepsilon}+\lambda^{\varepsilon}s,\varphi^{h})。\tag{5.42}$$

应用 (5.30)，对 $s\neq 0$，作如下的函数：

$$X^{j}(s,t^{\alpha},v^{h})=\varphi^{j}(s,\lambda^{\alpha},v^{h})=\varphi^{j}\left(s,\frac{t^{\alpha}-t_{0}^{\alpha}}{s},v^{h}\right)。\tag{5.43}$$

把这个等式关于t^{α}微分，由于 (5.42) 和 (5.30)，我们得到

$$\frac{\partial X^{j}}{\partial t^{\alpha}}=\frac{\partial\varphi^{j}}{\partial\lambda^{\beta}}\ \frac{1}{s}\delta_{\alpha}^{\beta}=\frac{1}{s}\ \frac{\partial\varphi^{j}}{\partial\lambda^{\alpha}}=b_{\alpha}^{j}(t^{\varepsilon},X^{h}),\tag{5.44}$$

又把等式 (5.43) 关于 s 微分，我们得到

$$\frac{\partial X^{j}}{\partial s}=\frac{\partial\varphi^{j}}{\partial s}-\frac{\partial\varphi^{j}}{\partial\lambda^{\alpha}}\ \frac{t^{\alpha}-t_{0}^{\alpha}}{s^{2}}=\frac{\partial\varphi^{j}}{\partial s}-\frac{\partial\varphi^{j}}{\partial\lambda^{\alpha}}\ \frac{\lambda^{\alpha}}{s},$$

或者，由于 (5.35) 和 (5.42)，

$$\frac{\partial X^{j}}{\partial s}=\lambda^{\alpha}b_{\alpha}^{j}(t^{\varepsilon},\varphi^{h})-\lambda^{\alpha}b_{\alpha}^{j}(t^{\varepsilon},\varphi^{h})=0,\tag{5.45}$$

由此可见，函数 (5.43) 不包含 s。所以我们可以写

$$X^{j}(t^{\alpha},v^{h})=X^{j}(s,t^{\alpha},v^{h})=\varphi^{j}(s,\lambda^{\alpha},v^{h}),\tag{5.46}$$

因而根据 (5.44)，我们有

$$\frac{\partial x^{j}}{\partial t^{\alpha}}=b_{\alpha}^{j}(t^{\varepsilon},x^{j}),\tag{5.47}$$

这就是 (5.26)。最后，在 (5.46) 中令$\lambda^{\alpha}=0$，注意，由(5.30)，这包含$t^{\alpha}=t_{0}^{\alpha}$，应用 (5.34)，我们求得，

$$x^{j}(t_{0}^{\alpha},v^{h})=\varphi^{j}(s,0,v^{h})=x_{0}^{j},\tag{5.48}$$

从 (5.47) 和 (5.48)，我们推出按照 (5.46) 所构造的函数是组 (5.26) 的解，并表示M^{m+n}中通过点$P(t_{0}^{\alpha},x_{0}^{j})$ 的一个m维曲面。引用参数v^{h}的变动，得到了一个 n 参数族的这种曲面。

证毕。

后者具有一个重要的推论。我们已经证明了族 (5.19) 的存在性为 (5.28) 的一个结果，我们可以构造相应的函数 (5.31)，

按定义，它们在族（5.19）的每个空间$C_m(v^h)$上是常数的意义下，是组（5.25）的积分。因此，对一个任意的位移dt^{α}，我们有

$$0=\frac{\partial g^j}{\partial t^{\alpha}}dt^{\alpha}+\frac{\partial g^j}{\partial x^h}dx^h=\left(\frac{\partial g^j}{\partial t^h}+b_{\alpha}^h\frac{\partial g^j}{\partial x^h}\right)dt^{\alpha},$$

从此导出，n个独立函数（5.20）中每个函数是偏微分方程

$$\frac{\partial \Phi(t^{\varepsilon},x^k)}{\partial t^{\alpha}}+b_{\alpha}^h(t^{\varepsilon},x^k)\frac{\partial \Phi(t^{\varepsilon},x^k)}{\partial x^h}=0 \qquad (5.49)$$

的一个解，所以我们可以推断条件（5.28）保证（5.49）的n个函数独立解$g^j(t^{\varepsilon},x^k)$的存在性。此外，若F表示n个独立变数的任一C^1类函数，从此直接地推出$F(g^j(t^{\varepsilon},x^h))$也是（5.49）的一个解，因为

$$\frac{\partial F}{\partial t^{\alpha}}+b_{\alpha}^h\frac{\partial F}{\partial x^h}=\frac{\partial F}{\partial g^j}\ \frac{\partial g^j}{\partial t^{\alpha}}+b_{\alpha}^h\frac{\partial F}{\partial g^j}\ \frac{\partial g^j}{\partial x^h}$$

$$=\frac{\partial F}{\partial g^j}\left(\frac{\partial g^j}{\partial t^{\alpha}}+b_{\alpha}^h\frac{\partial g^j}{\partial x^h}\right)=0.$$

再者，（5.49）的任一解是（5.26）的一个积分。

现在要阐明如何把Frobenius定理用外微分算法的语言来叙述。由于线性微分形式

$$\omega=a_j dx^j$$

的外微分

$$d\omega=\frac{\partial a_j}{\partial x^k}dx^k\wedge dx^j,$$

所以线性微分形式（5.24）的外微分

$$d\omega^j=-\frac{\partial b_{\alpha}^j}{\partial t^{\beta}}dt^{\beta}\wedge dt^{\alpha}-\frac{\partial b_{\alpha}^j}{\partial x^h}dx^h\wedge dt^{\alpha}.$$

或者，利用（5.25）消去dx^h，得

$$d\omega^j=\left(\frac{\partial b_{\alpha}^j}{\partial t^{\beta}}+\frac{\partial b_{\alpha}^j}{\partial x^h}b_{\beta}^h\right)dt^{\alpha}\wedge dt^{\beta}+\frac{\partial b_{\alpha}^j}{\partial x^h}dt^{\alpha}\wedge\omega^h.$$

用（5.29）的记号表达，这可写成如下的形式：

$$d\omega^j = \sum_{\alpha<\beta} P^j_{\beta\alpha}\, dt^\alpha \wedge dt^\beta + \frac{\partial b^j_\alpha}{\partial x^h} dt^\alpha \wedge \omega^h. \tag{5.50}$$

我们令

$$\Omega^j = d\omega^j \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n, \tag{5.51}$$

对于这个（$n+2$）微分形式的明显表达式可以从（5.44）和 $\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$ 的外积而得到，这里要注意：

$$\omega^h \wedge \omega^1 \cdots \wedge \omega^n = 0 \quad (h = 1, \cdots, n).$$

这样求得

$$\Omega^j = \sum_{\alpha<\beta} P^j_{\beta\alpha} dt^\alpha \wedge dt^\beta \wedge \omega^1 \cdots \wedge \omega^n. \tag{5.52}$$

从此推出条件（5.28）包含 $\Omega^j = 0$. 为了证明其逆也成立，注意关于变数（x^j, t^α）的线性微分形式〔例如（5.25)〕的向量空间的基底元素可以取为（$dx^1, dx^2, \cdots, dx^n, dt^1, \cdots, dt^m$）。若把（$n+m$）×（$n+m$）矩阵

$$\begin{pmatrix} \delta^j_h & -b^j_\alpha \\ 0 & \delta^\alpha_\beta \end{pmatrix} \tag{5.53}$$

（它的行列式$=+1$）作用到这种基底元素上产生一个新基底，即（$\omega^1, \cdots, \omega^n, dt^1, \cdots dt^m$），因此（$n+2$）微分形式

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n \wedge dt^\alpha \wedge dt^\beta, \quad \alpha < \beta$$

构成一切（$n+2$）微分形式的 $\binom{n+m}{n+2}$ 维向量空间的对应基底的一个子集. 所以从(5.52) 推出 $\Omega^j = 0$ 隐含着 $P^j_{\beta\alpha} = 0$. 因此条件 $\Omega^j = 0$ 和（5.28）是等价的。所以Frobenius定理可按下列方式来叙述：

定理1.7′ 具有 C^1 系数 $b^j_\alpha(t^\alpha, x^h)$ 的 n 个全微分方程组(5.25) 是完全可积的一个充要条件是由（5.51）所定义的（$n+2$）微分形式 Ω^j 等于0：

$$d\omega^j \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n = 0 \quad (j = 1, \cdots, n). \tag{5.54}$$

因为线性微分形式（5.24）的结构，我们的全微分方程组（5.25）的类型有点特殊。但是上面的Frobenius定理的叙述容易推广到更一般的组(这是这个叙述的一个主要优点)。我们考虑由

$\pi^j=0$所描述的n个全微分方程组，其中线性微分形式π^j是由下式定义的：

$$\pi^j=G^j_h(t^s, x^k)dx^h+G^j_a(t^s, x^k)dt^a, \tag{5.55}$$

这里假定式中系数是C^1类，并且使得行列式

$$|G^j_h|\neq 0. \tag{5.56}$$

在这些情况下，存在$G^j_h(t^s, x^k)$的逆$H^k_j(t^s, x^k)$：

$$H^k_j G^j_h=\delta^k_h. \tag{5.57}$$

所以我们可以定义下列n个线性微分形式：

$$\mu^k=H^k_j\pi^j=dx^k-B^k_a(t^s, x^k)dt^a, \tag{5.58}$$

式中

$$B^k_a=-H^k_j G^j_a. \tag{5.59}$$

显然，形式（5.58）具有形式（5.25）的结构。因而组

$$\mu^h=0 \tag{5.60}$$

是可积的一个充要条件是（$n+2$）形式

$$U^k=d\mu^k\wedge\mu^1\wedge\cdots\wedge\mu^n \qquad (k=1, \cdots, n) \tag{5.61}$$

等于零。但是，由结构（5.58），可知（5.60）的可积性包含已知组$\pi^j=0$的可积性，于是我们还要把这个准则重写为以形式（5.55）来表达。

从（5.58），我们导出

$$d\mu^k=dH^k_j\wedge\pi^j+H^k_j d\pi^j,$$

或者，因为（5.58）的逆（由于（5.57））是

$$\pi^j=G^j_h\mu^h, \tag{5.62}$$

所以我们有

$$d\mu^k=G^j_h(dH^k_j\wedge\mu^h)+H^k_j d\pi^j. \tag{5.63}$$

其次，对(5.63)和$\mu^1\wedge\cdots\wedge\mu^n$取外积，注意到$\mu^h\wedge\mu^1\wedge\cdots\wedge\mu^n=0$，$h=1, \cdots, n$。我们求得（$n+2$）-形式（5.61）由下式给出：

$$U^k=H^k_j d\pi^j\wedge\mu^1\wedge\cdots\wedge\mu^n. \tag{5.64}$$

但是从（5.58），我们有

$$\mu^1\wedge\cdots\wedge\mu^n=H^1_{j_1}\cdots H^n_{j_n}\pi^{j_1}\wedge\cdots\wedge\pi^{j_n}$$
$$=\frac{1}{n!}\delta^{j_1\cdots j_n}_{h_1\cdots h_n}H^1_{j_1}\cdots H^n_{j_n}\pi^{h_1}\wedge\cdots\wedge\pi^{h_n}$$
$$=\det(H^j_h)\pi^1\wedge\cdots\wedge\pi^n,$$

于是（5.64）变为

$$U^k=\det(H^j_h)H^k_jd\pi^j\wedge\pi^1\wedge\cdots\wedge\pi^n. \tag{5.65}$$

所以，由于假定（5.56），推出条件$U^k=0$等价于

$$\Pi^j=0, \tag{5.66}$$

这里

$$\Pi^j=d\pi^j\wedge\pi^1\wedge\cdots\wedge\pi^n. \tag{5.67}$$

这样可以推断n个全微分方程组$\pi^j=0$为可积的一个充要条件是（5.66）要成立。

为了使这个结果易于直接应用到一般全微分方程组，可以适当地改变记号.让我们考虑一组N个自变数$z^A(A=1,2,\cdots,N)$。假定已知n个全微分方程组

$$\omega^j=0 \qquad (j=1,\cdots,n;\ n<N), \tag{5.68}$$

式中

$$\omega^j=G^j_A(Z^C)dZ^A(A,C=1,\cdots,N). \tag{5.69}$$

现在从上述理论推出：

定理1.8 方程组（5.68）为可积的一个充要条件是n个条件

$$d\omega^j\wedge\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n=0 \qquad (j=1,\cdots,n) \tag{5.70}$$

要满足。

作为一个例子，我们考虑$n=1$的情形，则已知的全微分方程是

$$\omega=G_Adz^A=0.$$

显然

$$d\omega\wedge\omega=\frac{\partial G_A}{\partial z^B}dz^B\wedge dz^A\wedge\omega$$
$$=-G_C\frac{\partial GA}{\partial z^B}dz^A\wedge dz^B\wedge dz^C.$$

因此，可积条件$d\omega\wedge\omega=0$等价于所求的条件

$$G_A\left(\frac{\partial G_B}{\partial z^C}-\frac{\partial G_C}{\partial z^B}\right)+G_B\left(\frac{\partial G_C}{\partial z^A}-\frac{\partial G_A}{\partial z^C}\right)$$
$$+G_C\left(\frac{\partial G_A}{\partial z^B}-\frac{\partial G_B}{\partial z^A}\right)=0.$$

当$N=3$时，这化为一个关系式G.curl $G=0$，这是G与一个数量函数的梯度成比例的一个充要条件。

§1.6. 矩阵分析

在向量代数和矩阵代数中，所采用的都是代数方法，即限于四则运算（+，−，×，÷），而没有涉及极限运算。本节将介绍矩阵的一些极限运算，继而利用这种运算来解线性微分方程组。这里以A表示n阶方阵。$A, A_1, \cdots$的第i行第j列的元素分别记作$a_{ij}, (a_{ij})_1, \cdots$。

为了书写方便，把一个列向量经常写为花括弧内的一行：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

行向量以圆括弧来表示：

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}^t=(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

记号t表示一个矩阵的转置。

一个n维向量空间中一组基底向量$e_1, \cdots, e_n$称为这个空间的一个标架。并记作$\{e_1, \cdots, e_n\}$。这样一个向量（就是向量空间中的一个元素）$x=(x_1, \cdots, x_n)$可写为这个行向量和一个标架的矩阵积：

$$x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i=(x_1, \cdots, x_n)\{e_1, \cdots, e_n\}.$$

1. 矩阵序列的收敛性

定义1 设有矩阵序列$\{A_m\}$，若当$m\to\infty$时，总有$(a_{ij})_m\to$

a_{ij}(i, $j=1, \cdots, n$)，则称序列$\{A_m\}$收敛于A，记作$A_m \to A$($m \to \infty$)，或$\lim\limits_{m\to\infty} A_m = A$。并称$A$为$\{A_m\}$的极限。非收敛的矩阵序列叫做发散的。

换言之，所谓$\{A_m\}$收敛于A指的是A_m的每个元素当$m\to\infty$时的极限为A的对应元素。

关于矩阵序列收敛性和数列的收敛性有许多类似的性质。例如，若$A_m \to A$，$B_m \to B$ ($m\to\infty$)，则由定义不难证明

$$aA_m + bB_m \to aA + bB \qquad (m\to\infty),$$

和

$$A_m B_m \to AB \qquad (m\to\infty),$$

从而由后者又可推出

$$PA_mQ \to PAQ.$$

定义2 设$A=(a_{ij})$是任一矩阵，而$B=(b_{ij})$是一非负的矩阵(即每个$b_{ij}\geqslant 0$)。若$|a_{ij}|\leqslant b_{ij}$(i, $j=1, 2, \cdots, n$)，则称B优于A(或A劣于B)，记作$A \ll B$.

定理1.9 对任意矩阵$A=(a_{ij})$，定义$\|A\| = \max\limits_{1\leqslant i,\ j\leqslant n} |a_{ij}|$，称为$A$的范数。

由定义立刻推出下列性质：

1° 设A是任一矩阵，B是非负的矩阵，m是正整数，则B^m是非负的，并当$A\ll B$时有$A^m \ll B^m$。

2° 设$\{A_m\}$是一个矩阵序列，$\{B_m\}$是一个非负的矩阵序列，并且$A_m \ll B_m$，$B_m \to 0$ ($m\to\infty$)，则$A_m \to 0$ ($m\to\infty$)。

3° 若A是复矩阵，且B为非负的，且$A \ll B$，则$\|A\|\leqslant\|B\|$。

4° $\|ABC\|\leqslant n^2\|A\|\cdot\|B\|\cdot\|C\|$。

证 若令$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，$C=(C_{ij})$，则

$$\|ABC\| = \max_{1\leqslant i,\ j\leqslant n} |(ABC)_{ij}|$$

$$= \max_{1\leqslant i,\ j\leqslant n} \left| \sum_{s,\ t=1}^{n} a_{is} b_{st} c_{tj} \right|$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i,\ j\leqslant n}\left(\sum_{s,\ t=1}^{n}|a_{is}|\cdot|b_{st}|\cdot|c_{tj}|\right)$$

$$\leqslant \sum_{s,\ t=1}^{n} \max|a_{is}|\cdot\max|b_{st}|\cdot\max|c_{tj}|$$

$$\leqslant n^2\|A\|\cdot\|B\|\cdot\|C\|.$$

5° $A_m \to 0\ (m\to\infty)$的一个充要条件 是$\|A_m\|\to 0\ (m\to\infty)$。

2. 矩阵级数

定义1 给定矩阵级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m,$$

令 $S_N=\sum_{m=0}^{N} A_m$, 若$S_N\to S\ (N\to\infty)$, 则称级数 $\sum_{m=0}^{\infty} A_m$收敛于S，记作$S=\sum_m A_m$。非收敛的矩阵级数叫做发散的。

显然, $\sum_{m=0}^{\infty} A_m=S$ 的意义指的是 $\sum_{m=0}^{\infty} (A_m)_{ij}=S_{ij}$, (i , $j=1, 2, \cdots, n$)。

定义2 若上式左边n^2个数项级数都绝对收敛,则称 $\sum_{m=0}^{\infty} A_m$ 绝对收敛。

由定义立刻推出下列性质：

1° 如果 $\sum_{m=0}^{\infty} A_m$绝对收敛，则必收敛，并任意调换它的项不影响其和。

2° $\sum_{m=0}^{\infty} A_m$ 绝对收敛的一个充要条件是 $\sum_{m=0}^{\infty} \|A_m\|$收敛。

3° 如果 $\sum_{m=0}^{\infty} A_m$收敛（或绝对收敛），则 $\sum_{m=0}^{\infty} PA_mQ$ 也收

敛（或绝对收敛），并有 $\sum_{m=0}^{\infty} PA_mQ=P\left(\sum_{m=0}^{\infty} A_m\right)Q$。

3．指数矩阵函数和三角矩阵函数

若 m 是一个 q 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的范数：$m=\|A\|$，则应用第1段性质4°和归纳法可证：

$$\|A^n\|<(qm)^n. \tag{6.1}$$

对任一 q 阶方阵 M，定义

$$e^M=U+M+\frac{1}{2!}M^2+\frac{1}{3!}M^3+\cdots+\frac{1}{n!}M^n$$

$$+\cdots(U\text{为单位矩阵}).$$

若 $\|M\|<m$，则由（6.1）式推出这个级数是绝对收敛的，并有 $\|e^M\|<e^{qm}$。

应当指出，$e^{A+B}=e^A\cdot e^B=e^B\cdot e^A$ 一般不再成立。可是当 $AB=BA$ 时，这个关系成立（见下面的定理 1.12）。

同样地，定义

$$\cos M=U-\frac{1}{2!}M^2+\frac{1}{4!}M^4-\cdots,$$

$$\sin M=M-\frac{1}{3!}M^3+\frac{1}{5!}M^5-\cdots.$$

4．矩阵函数

定义1 若矩阵 $A(u)=(a_{ij}(u))$ 的每个元素 $a_{ij}(u)$ 都是一个变量 u 的可微函数，则称 $A(u)$ 是可微的，它的导数定义为

$$\dot{A}(u)\equiv\frac{dA}{du}=\left(\frac{da_{ij}}{du}\right).$$

由定义立刻可以推出微分法与转置的次序是可交换的：

$$(\dot{A'})=(\dot{A})'.$$

矩阵函数 $A(u)$ 的定积分定义为它的元素的定积分的矩阵：

$$\int_{t_0}^{t} (a_{ij}(u))\ du=\left(\ \int_{t_0}^{t} a_{ij}(u)du\ \right).$$

至于矩阵$A(u)$叫做可积、连续、或有界指的是每个元素$a_{ij}(u)$都有这样类似的性质。

定理1.10 设$A(u)$与$B(u)$是两个可微矩阵，而积$A(u)\cdot B(u)$是有意义的，则

$$\frac{d}{du}\{A(u)B(u)\}=\dot{A}(u)B(u)+A(u)\cdot\dot{B}(u)$$

(乘法次序不可改变)。 (6.2)

证 令$P(u)=A(u)\cdot B(u)=(p_{ij}(u))$，则$p_{ij}(u)=\sum\limits_{r} a_{ir}(u)\cdot b_{rj}(u)$，所以

$$\frac{d}{du}p_{ij}(u)=\sum_{r}\left\{\frac{d}{du}a_{ir}(u)\right\}\cdot b_{rj}(u)+\sum_{r}a_{ir}(u)\cdot\left\{\frac{d}{du}b_{rj}(u)\right\},$$

即

$$\frac{d}{du}P(u)=\dot{A}(u)\cdot B(u)+A(u)\dot{B}(u).$$

定理1.11 设A是任一矩阵，则

$$\frac{d}{du}e^{uA}=A\cdot e^{uA}=e^{uA}\cdot A. \qquad (6.3)$$

证 由于

$$(e^{uA})_{ij}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}u^{m}(A^{m})_{ij},$$

因右边是u的幂级数，故对一切u都收敛，从而可逐次求导：

$$\frac{d}{du}\{(e^{uA})_{ij}\}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}u^{m-1}(A^{m})_{ij},$$

于是由第2段性质3°得到

$$\frac{d}{du}e^{uA}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}u^{m-1}(A^m)$$

$$=A\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}u^{m-1}A^{m-1}=A\cdot e^{uA}$$

$$=\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}u^{m-1}A^{m-1}\right\}\cdot A=e^{uA}\cdot A.$$

定理1.12 如果$AB=BA$，则$e^A\cdot e^B=e^B\cdot e^A=e^{A+B}$。

证 由第二段的性质3°就有：

$$e^{uA}\cdot B=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u^m}{m!}A^m\right)\cdot B=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u^m}{m!}A^mB$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u^m}{m!}BA^m=B\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u^m}{m!}A^m=B\cdot e^{uA},$$

这表明，当$AB=BA$时，成立

$$e^{uA}\cdot B=B\cdot e^{uA}.$$

同理，

$$e^{uB}\cdot A=A\cdot e^{uB}.$$

现在令$C(u)=e^{u(A+B)}\cdot e^{-uA}\cdot e^{-uB}$，则由定理1.10与定理 1.1即得

$$\dot{C}(u)=(A+B)\cdot e^{u(A+B)}e^{-uA}e^{-uB}+e^{u(A+B)}\cdot(-A)e^{-uA}\cdot e^{-uB}$$
$$+e^{u(A+B)}e^{-uA}\cdot(-B)e^{-uB}.$$

因$AB=BA$，所以$A(A+B)=(A+B)A$，$B(A+B)=(A+B)B$，从上列二式就可知这个等式右边等于

$$(A+B-A-B)e^{u(A+B)}e^{-uA}e^{-uB}=0,$$

所以

$$\dot{C}(u)=\frac{d}{du}C(u)=0,$$

即$C(u)$与u无关，所以$C(1)=C(0)$。但$C(0)=U$，所以$C(1)=U$，即

$$e^{A+B}\cdot e^{-A}\cdot e^{-B}=U.$$

根据对称性，又有

$$e^{A+B}\cdot e^{-B}\cdot e^{-A}=U.$$

这表明，当$AB=BA$时，上列两式成立。特别是，取$B=-A$，则有

$$e^{0}e^{-A}e^{A}=U\text{与}e^{0}e^{A}e^{-A}=U.$$

但$e^{0}=U$，显然，对任一矩阵A，就有

$$e^{-A}e^{A}=U=e^{A}e^{-A},$$

即$e^{-A}=(e^{A})^{-1}$，于是上列两式变为

$$e^{A+B}(e^{A})^{-1}(e^{B})^{-1}=U\text{与}e^{A+B}(e^{B})^{-1}(e^{A})^{-1}=U,$$

即

$$e^{A+B}=e^{A}e^{B}=e^{B}e^{A}.$$

证毕。

在证明定理 1.8 的过程中已证明了

定理1.13 对任一矩阵A，e^{A}总是满秩的，并且$e^{-A}=(e^{A})^{-1}$。

应当指出：关系式

$$\frac{d}{du}\{A(u)\}^{m}=m\{A(u)\}^{m-1}\cdot\frac{d}{du}A(u)$$

一般是**不成立**的。

定义2 一个方阵叫做**正交的**，如果它的转置是它的逆：

$$AA'=A'A=U\qquad(U\text{为单位矩阵}).$$

两个行向量a和b的**数量积**（或点积），定义为$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{ab}'$，它经过一个**正交**矩阵$A$的变换保持不变，$\mathbf{a}A\cdot\mathbf{b}A=\mathbf{a}A\cdot A'\mathbf{b}'=\mathbf{ab}'=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。一个正交矩阵的行列式是$\pm1$。若是$+1$，则矩阵是一个**旋转**。每个$2\times2$旋转可写成

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

特别重要的是，经过$\frac{\pi}{2}$的旋转，矩阵$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$。两个平面向量的**外积**（叉积）是

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot J\mathbf{b} \tag{6.4}$$

若A是一个旋转，则

$$J=A'JA. \tag{6.5}$$

5. Cartan矩阵与微分几何中的基本定理

设$A(u)$为一个可微满秩方阵，则称$\dot{A}A^{-1}$为A的Cartan矩阵，记作

$$C(A)=\dot{A}A^{-1}. \tag{6.6}$$

由定义，立刻得到

$$C(AB)=C(A)+AC(B)A^{-1}. \tag{6.7}$$

在以后的讨论中会看到，这个公式包含微分几何的许多内容。

定理1.14 一个正交矩阵函数的Cartan矩阵是反称的，即

$$C(A)'=-C(A). \tag{6.8}$$

证 由于A为正交矩阵，所以

$$(AA')=U(\text{即}A'=A^{-1}),$$

两边求导，得

$$\dot{A}A'+A\dot{A}'=\dot{A}A^{-1}+(\dot{A}A^{-1})'=0,$$

即

$$C(A)=-C(A)'.$$ 证毕。

以后会看到其逆运算。

定理1.15 两个可微矩阵函数$A(s)$，$B(s)$有相同的Cartan矩阵的一个充要条件是$A(s)=B(s)M$，$(M=\text{const})$。

证 如果$A(s)=B(s)M$，$C(M)=0$，于是(6.7)表明，$C(A)=C(B)$，若这两个Cartan矩阵中有一个存在。反之，若$C(A)=C(B)$，则可写下$A(s)=B(s)M(s)$，这是因为$B(s)$的逆存在。由方程(6.7)可知，$BC(M)B^{-1}=0$，从而$C(M)=0$，$M=\text{const}$。

定义4 若一个矩阵函数$K(s)$的一切元素$k_{ij}(s)$都是连续的，则称$K(s)$是连续的。若$K(s)$的一切元素$k_{ij}(s)$有界：

$$|k_{ij}|<m,$$

则K也有界：

$$|K|<m.$$

若$K(s)$在一闭区间上是连续的，则由Weierstrass 定理，$K(s)$在这个区间上是有界的。

现在要证明微分几何中的基本定理，即

定理1.16 设$K(s)$是在区间$s_0\leqslant s\leqslant s_1$上一个连续矩阵函数，则对任一$s^*(s_0\leqslant s^*\leqslant s_1)$，存在$s^*$的周围的一个区间，以及在这个区间中所定义的一个满秩矩阵函数$A(s)$，使得$K(s)=C(A(s))$，$A(s^*)=U$。

即：任何连续矩阵函数是某一可微满秩矩阵的Cartan矩阵。

证 我们必须解具初始条件$A(s^*)=U$的矩阵微分方程：

$$A'(s)A^{-1}(s)=K(s), \tag{6.9}$$

或即

$$\frac{dA}{ds}=K(s)A(s). \tag{6.9$'$}$$

我们建立一个逐次逼近法：

$$A_0=U,$$

$$A_1(s)=U+\int_{s^*}^{s}K(\sigma)A_0d\sigma,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n(s)=U+\int_{s^*}^{s}K(\sigma)A_{n-1}(\sigma)d\sigma,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

因为连续的q阶方阵$K(s)$在s^*周围的任一闭区间上是有界的，$|K(s)|\leqslant m$，则由归纳法来证明

$$|A_n(s)-A_{n-1}(s)|\leqslant q^{n-1}m^n\frac{|s-s^*|^n}{n!}. \tag{6.10}$$

由于$|A_1(s)-A_0|\leqslant\int_{s^*}^{s}|K(\sigma)||d\sigma|\leqslant m|s-s^*|$，假设(6.9)成立，则

$$|A_{n+1}(s)-A_n(s)|=\left|\int_{s^*}^{s} K(\sigma)[A_n(\sigma)-A_{n-1}(\sigma)]d\sigma\right|$$

$$\leqslant mq^{n-1}m^n\int_{s^*}^{s}\frac{|\sigma-s^*|^n}{n!}|d\sigma|$$

$$\leqslant qmq^{n-1}m^n\int_{s^*}^{s}\frac{|\sigma-s^*|^n}{n!}|d\sigma|$$

$$=q^n m^{n+1}\frac{|s-s^*|^{n+1}}{(n+1)!},$$

不等式（6.10）证毕。(6.10) 的右边的表达式是 $e^{qm|s-s^*|}/q$的泰勒展开式的第 $n+1$ 项；当 n 无限增大时，它趋于零，所以

$$A(s)=\lim_{n\to\infty}A_n(s)$$

存在并满足积分方程

$$A(s)=U+\int_{s^*}^{s}K(\sigma)A(\sigma)d\sigma.$$

一切函数 $A_n(s)$ 都是连续的，因为诸积分都是通过连续函数作成的。对$A(s)$ 的收敛性是一致的，因在不等式（6.10）中，可用常数 s_1-s_0 来代替 $|s-s^*|$。由此，$A(s)$ 是连续的，从而作为一个积分的 $A(s)$ 是可微的，于是得到：$A^1(s)=K(s)A(s)$。由构造，$A(s^*)=U$。$A(s^*)$ 的行列式是1。由 s 的连续函数构成的行列式自身是 s 的一个连续函数；从此存在 s^*周围的一个区间，在这个区间中，这个行列式大于0，从而在这个区间中 $A(s)$ 有一个逆 $A^{-1}(s)$，于是（6.9）成立，即：

$$A^1(s)A^{-1}(s)=K(s).$$

由定理1.15 推出：对具初始条件 $B(s^*)=M$ 的这个方程的唯一解是借$B(s)=A(s)M$给定的。

第二章　欧氏微分几何

本章着重叙述三维欧氏空间E^3中的欧氏微分几何，就是研究在运动群D^3之下曲线和曲面的不变性质，主要论述曲线与曲面的局部性质，同时也适当地介绍整体微分几何的一些内容。

应当指出，本章所介绍的内容，虽然属于古典微分几何的范畴，但是这里是应用活动标架法系统地叙述这方面的内容，并有其特殊的风格与观点。但由于篇幅所限，关于国内古典微分几何的书中常见的内容，不作详细的介绍，必要时，可参考方德植〔I〕。

§2.1. 平面曲线的欧氏微分几何

本节研究平面曲线在欧氏平面E^2上的运动群D^2之下的不变性质。平面E^2上参考于笛氏直角坐标系的运动可写作如下的形式（见第一章（3.1），（3.2），（3.3））：

$$x_1^* = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1,$$
$$x_2^* = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2,$$

式中系数a_{ij}满足下列条件：

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1,$$
$$a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1,$$
$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0.$$

容易验证E^2上的运动可化为

$$x_1^* = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta + a_1,$$
$$x_2^* = -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta + a_2,$$

由此可见，平面上的运动群具有三个本质参数θ，a_1，a_2，记作G_3。

1. 曲线的参数表示 我们知道，曲线的参数方程可写为：

$$x_1=x_1(t),\quad x_2=x_2(t),\qquad a\leqslant t\leqslant b, \tag{1.1}$$

今后假定

$$\dot{x}_1^2(t)+\dot{x}_2^2(t)>0\ \left(\dot{x}_1=\frac{dx_1}{dt},\ \dot{x}_2=\frac{dx_2}{dt}\right).$$

若函数$f(t)$（$a\leqslant t\leqslant b$）具有直到r阶（$r\geqslant 1$）的连续导数，称$f(t)$为C^r函数。当曲线（1.1）中的$x_1(t)$，$x_2(t)$都是C^r函数并满足条件（1.2）时，则称它为C^r曲线。本节里如无特别声明，都规定曲线是C^r（$r\geqslant 2$）的。曲线的弧长s决定于

$$s=\int_a^b\sqrt{\dot{x}_1^2(t)+\dot{x}_2^2(t)}\ dt. \tag{1.2}$$

在本节里，我们取弧长s作为曲线的参数，关于它的导数用撇号来表示。

2. 活动标架 平面上的笛氏坐标系是可以借两个单位向量在它的$+x_1$，$+x_2$（这里以x_1，x_2代替上面的x，y）轴上给出的。反之，平面上某点的两个互相正交的单位向量决定一个笛氏坐标系；如果选取它们来确定带正向的轴，欧氏平面与一个二维向量空间的性质完全不同。在向量空间中，长度和方向都相同的向量是一样的。在欧氏空间中基本的几何对象是一个向量同它的起点。从这个概念，使我们能够在欧氏平面的向量平面现象中，引入一个标架的概念。我们采用这个概念比§1.6中所引入的概念暂时加以较多的限制。

一个标架是互相垂直的单位向量的一个向量$\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$，使得$\mathbf{e}_2$是从$\mathbf{e}_1$旋转$+\frac{\pi}{2}$而得到。

平面上的坐标是由某标架$\{e_1, e_2\}$来固定的。给定一条C^r曲线，以它的弧长来表示：

$$x(s)=(x_1(s),\ x_2(s))\{e_1,\ e_2\}=x_1e_1+x_2e_2,$$

它的切线 $t(s)=x_1'e_1+x_2'e_2$ 是一个单位向量。法线

$$n(s)=-x_2'e_1+x_1'e_2$$

是从 $t(s)$ 旋转$+\frac{\pi}{2}$而得到的单位向量。$\{t(s),\ n(s)\}$叫做曲线的活动标架。这个活动标架有两个可能的解释。在欧氏平面上它对曲线上任意确定这样一个笛氏坐标系，使得 $x(s)$ 作为原点和$+x_1$轴在弧长增加的方向切于曲线（图 2.1）。按另一种形式，我们可以认为一切标架$\{t(s),\ n(s)\}$参考于固定标架$\{e_1, e_2\}$的原点O而构成（图 2.2）。这意味着现在我们把平面考虑作一个二维向量空间。这时，$t(s)$ 的端点在单位圆上绕O运动；它描绘曲线$x(s)$ 的切线象。若在向量平面上活动标架（或切线象）是借 s 的一个函数给定的，则曲线在欧氏平面上可以从

$$x(s)=x(s_0)+\int_0^s t(\sigma)d\sigma \tag{1.3}$$

来求。运算$x\to x+x_0$叫做平面经过x_0的一个平移。从此得到

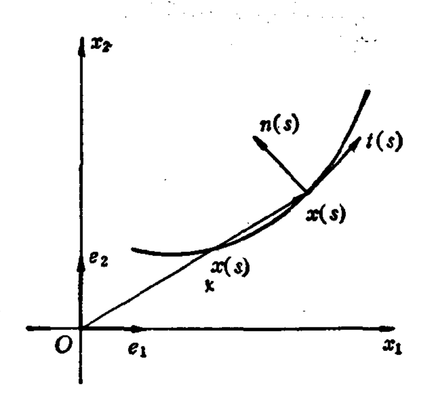


图 2.1

定理2.1 切线象除了一个平移外确定一条曲线。

事实上，若两条曲线 $x(s)$ 和 $y(s)$ 有相同的切线象，则由方程（1.3)可知

$$x(s)-y(s)=x_0-y_0$$

是常数。从此 $x(s)$ 是从 $y(s)$ 经过按向量 x_0-y_0的方向和长度给定的一个平移而得到的。

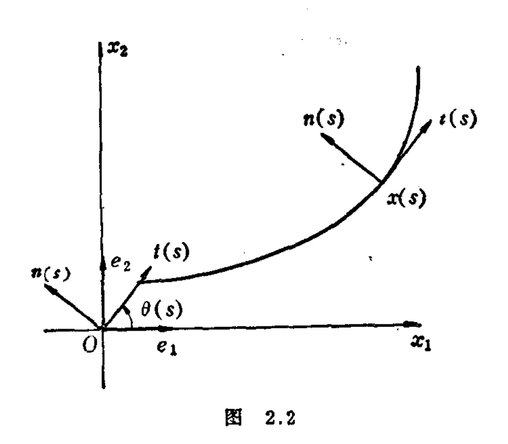


图 2.2

活动标架是从一个固定标架经过 e_1和 t 的交角 θ 的一个旋转而得到的（图 2.2），

$$\{t,\ n\}=A(s)\{e_1,\ e_2\},$$

$$A(s)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1' & x_2'\\ -x_2' & x_1'\end{pmatrix}. \qquad (1.4)$$

矩阵 $A(s)$ 叫做曲线 $x(s)$的**标架矩阵**。由定理 2.1 标架矩阵除了一个平移外确定曲线。若用矩阵 B 的一个旋转来变更固定标架：

$$\{e_1,\ e_2\}=B\{i_1,\ i_2\},$$

则标架矩阵将从 A 变到 AB，这是因为

$$\{\mathbf{t},\ \mathbf{n}\}=A(s)B\{\mathbf{i}_1,\ \mathbf{i}_2\}.$$

活动标架沿曲线的变更是决定于

$$\frac{d}{ds}\{\mathbf{t},\ \mathbf{n}\}=A'\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}=A'A^{-1}\{\mathbf{t},\ \mathbf{n}\},$$

即

$$\{\mathbf{t},\ \mathbf{n}\}'=C(A)\{\mathbf{t},\ \mathbf{n}\}$$

$$(C(A)\text{表示}A\text{的 Cartan 矩阵}). \tag{1.5}$$

这个方程叫做平面曲线 $\mathbf{x}(s)$ 的 Frenet **方程**。由定理 1.10，$C(A)$ 是一个反称矩阵，因而可以写

$$C(A)=\begin{pmatrix}0 & k(s)\\ -k(s) & 0\end{pmatrix}=k(s)J. \tag{1.6}$$

于是 Frenet 方程可以明显地写成

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=k(s)\mathbf{n},$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-k(s)\mathbf{t}. \tag{1.7}$$

利用方程（1.6）与（1.4），经过简单的计算，我们得到

$$k(s)=\frac{d\theta}{ds}=\mathbf{x}''\times\mathbf{x}'. \tag{1.8}$$

我们称 $k(s)$ 为曲线 $\mathbf{x}(s)$ 的**曲率**。$\frac{1}{k(s)}=\rho(s)$称为 $\mathbf{x}(s)$ 的**曲率半径**。由（1.8）可知，曲率这个命名是由于它表达曲线弯曲的快慢程度。

通过点 $\mathbf{x}(s)$ 并沿法线的正向以 $\rho(s)$ 为半径的圆称为曲线在点 $\mathbf{x}(s)$ 的**曲率圆**，又称密切圆。圆心称为曲线的**曲率中心**；

3. 平面曲线论的基本定理　我们要证明：

两条曲线是迭合的一个充要条件是它们的曲率相等。

在初等几何里，如果经过一个旋转和一个平移把两个图形中的一个变到另一个，就说这两个图形是**迭合的**。

设R是一个定旋转矩阵，$\mathbf{b}$是一个定向量，则映射$\mathbf{x} \to R\mathbf{x}+\mathbf{b}$称为一个**欧氏运动**。如果两条曲线之一为另一在欧氏运动之下的象，就说**这两条曲线是迭合的**。

我们把平移和旋转分别处理。曲线$\mathbf{x}(s)$与$\mathbf{x}(s)+\mathbf{b}$显然有相同的切向量$\mathbf{t}(s)=\dfrac{d\mathbf{x}}{ds}$；从而它们的弧长和标架矩阵以及标架矩阵的 Cartan 矩阵都相同。

一个向量$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2$可以按照两种方式变到旋转向量$R\mathbf{x}$。我们可以保留坐标系不动并把坐标作为行向量而变动：$(x_1, x_2)\to(x_1, x_2)R$，或者把由$\mathbf{x}$和标架$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$构成的图形如同刚体那样进行旋转。这表明，把这个标架变到一个新的标架$\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2\}=R\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$。旋转后的向量$R\mathbf{x}$关于标架$R\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$的坐标是$\mathbf{x}$关于标架$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$的坐标（图 2.3），那是很重要的。如果$R$是一个旋转$\mathbf{x}\to R\mathbf{x}$，$\left|\dfrac{dR\mathbf{x}}{ds}\right|=\left|R\dfrac{d\mathbf{x}}{ds}\right|=|\mathbf{t}(s)|=1$；由此可见，$s$也是旋转后的曲线$R\mathbf{x}(s)$的弧长。故得

定理2.2 迭合曲线的弧长相等。

用标架$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$来表达，对旋转后的曲线的切向量的坐标是$\{x_1', x_2'\}R$；这曲线的标架矩阵是$A(s)R$；由方程（1.6.7）Cartan 矩阵是$C(AR)=C(A)$；于是由（1.6）可知，经过旋转后曲率不变，故得

定理2.3 两条C^2曲线是迭合的一个充要条件是它们（作为弧长的一个函数）的曲率相等。

我们已经证明了必要性。现在还要证明充分性：除了一个旋转外，曲率确定标架矩阵，则由定理 2.1 就可推出充分条件。这里利用 Cartan 矩阵（1.6)比用曲率来证明容易得多。

在平面几何的情形，我们把定理 1.16 中K取为$K(s)=k(s)J$，则可得到方程$A'(s)A^{-1}(s)=Jk(s)$的一个明显解。若令

$$L(s)=\int_{s^*}^{s} K(\sigma)\,d\sigma=\left(\int_{s^*}^{s} k(\sigma)\,d\sigma\right)J,$$

矩阵$L(s)$与它的导数$K(s)$的次序交换：

$$L(s)K(s)=K(s)L(s)=-k(s)\int_{s^*}^{s} k(\sigma)d\sigma U$$

（因$J^2=-U$）

只在这个情形下成立：

$$(L^n)'=nL^{n-1}K=nKL^{n-1};$$

从此

$$(e^L)'=Ke^L,\quad e^{L(s^*)}=U.$$

具给定初始条件的方程$K(s)=C(A(s))$的唯一解（见定理1.16）是

$$A(s)=J\int_{s^*}^{s} k(\sigma)d\sigma, \tag{1.9}$$

从

$$J^2=-U,\quad J^3=-J,\quad J^4=U,\cdots, \tag{1.10}$$

就可算出这个指数矩阵是

$$A(s)=\begin{pmatrix} \cos\int_{s^*}^{s} k(\sigma)d\sigma & \sin\int_{s^*}^{s} k(\sigma)d\sigma \\ -\sin\int_{s^*}^{s} k(\sigma)d\sigma & \cos\int_{s^*}^{s} k(\sigma)d\sigma \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

这是一个正交矩阵。如果我们给定一个初始标架

$$\{\mathbf{t}(s^*),\ \mathbf{n}(s^*)\}=M\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}, \tag{1.12}$$

矩阵M也是正交的；具有已知曲率$k(s)$和一点$\mathbf{x}(s^*)$的标架$\{\mathbf{t}(s^*),\ \mathbf{n}(s^*)\}$的唯一的曲线，从标架矩阵$B(s)=A(s)M$而得到。$A(s)$的行列式总等于$+1$；从此，这条曲线不仅在$s^*$的邻域中，而且在$k(s)$的整个定义区域中存在。这样，不仅证明了定理2.3，而且证明了

定理2.4 在闭区间 $a \leqslant s \leqslant b$ 上给定任一连续函数 $k(s)$ 和在 $\mathbf{x}(s^*)$ 的初始标架 $\{\mathbf{t}(s^*), \mathbf{n}(s^*)\}$，唯一地存在一条平面曲线，通过 $\mathbf{x}(s^*)$ 并在 $\mathbf{x}(s^*)$ 有切线 $\mathbf{t}(s^*)$ 而且以 $k(s)$ 作为它在任意一点的曲率。

这叫做平面曲线论的基本定理。

方程 $k = k(s)$ 叫做由它所确定的曲线的自然方程。与一已知曲线迭合的一切曲线的所有公共性质可以从它们的公共自然方程导出。又，自然方程与平面上任何特殊坐标系无关。

4．两条平面曲线的接触 在研究图形（曲线或曲面）上某一点的局部性质时，从这个图形在所考虑的点引出另一个图形，而研究它们之间的接近程度是具有重要意义的。例如我们想研究达到一定正确程度在无穷小范围内寻求曲线C_1的性质时，就取另一条曲线C_2使它与C_1具有相同的正确程度；若对C_2具有熟知的性质，则它就可以代表C_1在所考虑点的性质了。例如，我们想研究一条平面曲线C_1在某点P_0的弯曲程度时，就可以取C_1在P_0点的密切圆来代替它，因为密切圆与C_1在P_0点的曲率相等。

现在来研究两条平面曲线 C_1和 C_2在公共点 P_0 的相互位置。对每条曲线都取弧长 s 为参数，则曲线的方程可写为

$$C_1: \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1(s);\quad C_2: \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2(s), \tag{1.13}$$

取P_0为C_1，C_2计算弧长的起点，则

$$\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_2(0) = \overrightarrow{OP_0}. \tag{1.13$'$}$$

我们把P_0分别沿C_1和C_2移动同一距离 s（并给定一定的符号），使 P_0分别移到P_1和P_2，则有

$$s = \overset{\frown}{P_0P_1} = \overset{\frown}{P_0P_2}$$

或即

$$\overrightarrow{OP_1} = \mathbf{x}_1(s),\quad \overrightarrow{OP_2} = \mathbf{x}_2(s).$$

现在用距离P_1P_2来估计曲线 C_1与 C_2 之间的差异。为此把

$x_1(s)$ 和 $x_2(s)$ 展开为幂级数：

$$\left.\begin{aligned} x_1(s)&=x_1+x_1's+x_1''\frac{s^2}{2!}+\cdots+x_1^{(n)}\frac{s^n}{n!}+\cdots,\\ x_2(s)&=x_2+x_2's+x_2''\frac{s^2}{2!}+\cdots+x_2^{(n)}\frac{s^n}{n!}+\cdots,\end{aligned}\right\}\quad(1.13)''$$

式中 x_1和 x_2和它们的导数都在点P_0处取值。

我们注意到 (1.13)′，$x_1(0)=x_2(0)$，故有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2}&=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}\\ &=(x_2'-x_1')\frac{s}{1}+(x_2''-x_1'')\frac{s^2}{2!}\\ &\quad+\cdots+(x_2^{(n)}-x_1^{(n)})\frac{s^n}{n!}+\cdots,\end{aligned}\qquad(1.14)$$

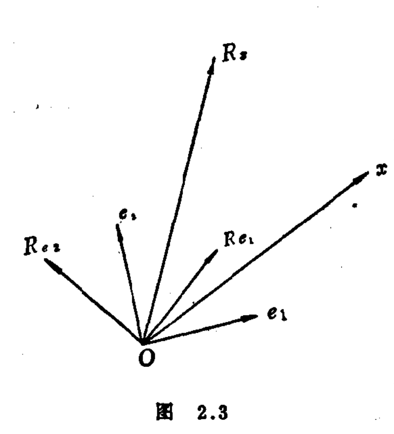


图 2.3

现在让 $s\to 0$，则P_1和P_2是C_1和C_2上与P_0的距离为同一无穷小s。因此P_1和P_2分别沿C_1和C_2趋于P_0。我们利用(1.14)来估计P_1P_2与s比较的无穷小的阶数。为此，分成下列几种不同的可能情形：

1° x_1'和x_2'不共线。这时C_1和C_2在P_0的切线不重合，所以展开式 (1.14) 中关于s的系数不等于零，因而P_1P_2对弧长s是一阶无穷小。这就是C_1和C_2相交的情形。

2° x_1'与x_2'共线。这时C_1和C_2在P_0的切线重合，我们说C_1和C_2在P_0互相接触。因 x_1'和 x_2' 都是单位向量，故有

$$x_2'=\pm x_1',$$

我们不妨把取负号的情形除外。实际上，若 $x_2'=-x_1'$，则可在一曲线C_1 (或C_2)上从起点P_0向相反的方向计算，即用$-s$代替s。

因此 $\mathbf{x}_1'$（或 $\mathbf{x}_2'$）要变号，故有

$$\mathbf{x}_2' = \mathbf{x}_1', \tag{1.15}$$

这时，展开式（1.14）中一次项消失了，所以在C_1和C_2接触的情况下，距离 P_1P_2 关于 s 至少是二阶无穷小。可是在接触的情况下，可能彼此特别密切地接近，例如，若在P_0，$x_2'=x_1'$，$x_2''=x_1''$，则展开式（1.14）头两项都消失了，则P_1P_2对 s 至少是三阶无穷小。这时我们说C_1与C_2在P_0至少构成二阶接触。

3° 一般情形：在C_1和 C_2的公共点P_0处有

$$\mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_2', \quad \mathbf{x}_1'' = \mathbf{x}_2'', \cdots, \mathbf{x}_1^{(n)} = \mathbf{x}_2^{(n)}, \tag{1.16}$$

这时，展开式（1.14）中头 n 项都消失，因此P_1P_2关于 s 至少是 $n+1$ 阶无穷小。若P_1P_2恰是$n+1$阶无穷小，则说C_1和C_2在P_0构成 n 阶接触。其条件是（1.16）和

$$\mathbf{x}_1^{(n+1)} \neq \mathbf{x}_2^{(n+1)}. \tag{1.16$'$}$$

综合以上所述，我们得到

定理2.4′ 两条平面曲线C_1和 C_2在公共点 P_0 或者相交（若 $\mathbf{x}_1'$ 和 $\mathbf{x}_2'$ 不共线），或者互相接触（若 $\mathbf{x}_1'$ 和 $\mathbf{x}_2'$ 共线）。接触的阶数要看 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$关于 s 的逐次导数在P_0处的值有多少个相等。

现在把 n 阶接触条件（1.16）写成坐标的形式。设 $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$的坐标分别为（x_1，y_1）和（x_2，y_2），则条件（1.16）可写成

$$\left.\begin{aligned} x_1' = x_2', \quad x_1'' = x_2'', \cdots, x_1^{(n)} = x_2^{(n)} \\ y_1' = y_2', \quad y_1'' = y_2'', \cdots, y_1^{(n)} = y_2^{(n)} \end{aligned}\right\}. \tag{1.16$''$}$$

曲线C在正常点P_0的邻近表达为

$$y = f(x),$$

则

$$f' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{y'}{x'},$$

$$f''=\frac{df'}{dx}=\frac{d\,(y'/x')}{x'\,ds}=\frac{y''x'-x''y'}{x'^3}\cdots,$$

这表明，把参数 s 换成 x，并且一切 y 关于 x 到 n 阶为止的导数就可用 y（以及 x）关于 s 到 n 阶为止的导数来表达。反之亦然。因此，条件 (1.16)″ 等价于：在曲线 C_1 和 C_2 的公共点 P_0 处，y 关于 x 的导数到 n 阶为止的数值相等。

这就是说，若 C_1 和 C_2 的方程分别为 $y=f_1(x)$，和 $y=f_2(x)$，则 C_1 和 C_2 构成 n 阶接触的一个充要条件是在 $P_0(x_0, y_0)$ 处成立：

$$f_1'=f_2',\quad f_1''=f_2'',\cdots,f_1^{(n)}=f_2^{(n)}. \tag{1.16$'''$}$$

现在给出这个条件的几何解释：对同一个 x 的值，我们估计在曲线 C_1 和 C_2 所对应的两点 P_1 和 P_2 的 y 值之差。把 f_1 和 f_2 按 $x-x_0$ 的幂级数展开：

$$\left.\begin{aligned}f_1(x)=y_0+f_1'(x_0)(x-x_0)+f_1''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots,\\ f_2(x)=y_0+f_2'(x_0)(x-x_0)+f_2''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

注意到 (1.16)‴，差式 $f_2(x)-f_1(x)$ 的展开式仅从 $n+1$ 项开始，因此，当 $x\to x_0$ 时，在 P_1 和 P_2 两点的 y 值之差对 $x-x_0$ 是高于 n 次无穷小。

反之，若 y 值之差与 $x-x_0$ 比较至少是 $n+1$ 次无穷小，则 $f_2(x)-f_1(x)$ 不可能包含 $x-x_0$ 的幂低于 $n+1$ 次的项，即此种项的系数必等于零。由 (1.17) 可见：

$$f_2'-f_1'=0,\ f_2''-f_1''=0,\cdots,f_2^{(n)}-f_1^{(n)}=0,$$

即条件 (1.16)‴。就是说，这些条件与条件 (1.16)‴ 是等价的，这就是它们的几何解释。

现在要证明平面曲线接触的另一个形式的充要条件，即

定理2.4″ 设 C_1 的方程为 $F(x, y)=0$，C_2 的方程为 $x=x(t)$，$y=y(t)$，并设在点 $t=t_0$，即在 $P_0(x_0, y_0)$ 处，$F_x^2+F_y^2\neq 0$，$\dot{x}^2(t_0)+\dot{y}^2(t_0)\neq 0$，则曲线 C_2 与曲线 C_1 在 P_0 构成 n 阶接触的一个充要条件是在点 $t=t_0$ 处成立：

$$\varphi(t_0)=\varphi'(t_0)=\cdots=\varphi^{(n)}(t_0)=0.$$

式中 $$\varphi(t)\equiv F[x(t), y(t)].$$

证 由于 P_0 为曲线 C_1 和 C_2 的公共点，所以

$$x_0=x(t_0), \quad y_0=y(t_0)$$

和

$$F(x_0, y_0)=0,$$

因而

$$\varphi(t_0)=0.$$

把 $\varphi(t)$ 按 $t-t_0$ 的幂级数展开：

$$\varphi(t)=\varphi'(t_0)(t-t_0)+\varphi''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2!}+\cdots$$
$$+\varphi^{(n)}(t_0)\frac{(t-t_0)^n}{n!}+\cdots.$$

若让 $t\to t_0$，则 $\varphi(t)$ 与 $t-t_0$ 同时为无穷小，并且 $\varphi(t)$ 对 $t-t_0$ 的无穷小的阶数是展开式中第一个不为零的项的次数。

为了确定起见，对曲线 C_1，

$$F_y(x_0, y_0)\neq 0, \tag{1.18}$$

对曲线 C_2，

$$x'(t_0)\neq 0, \quad \text{即} \lim_{t\to t_0}\frac{x-x_0}{t-t_0}\neq 0. \qquad (1.18)'$$

由条件 (1.18)，在已知点 P_0 的邻近把 y 写成 x 的函数。

在曲线 C_2 上取某点 $P_2[x(t), y(t)]$，且在曲线 C_1 上取对

应于 x 的同一值的点P_1，以Y表示P_1的纵坐标，所以

$$F(x, Y)=0.$$

从而可写

$$\varphi(t)=F(x, y)-F(x, Y),$$

引用有限改变量定理，便得

$$\varphi(t)=F_y(x, Z)(y-Y), \tag{1.19}$$

其中Z为y和Y之间的某一值。于是

$$\frac{\varphi(t)}{y-Y}=F_y(x, Z). \tag{1.19$'$}$$

现在让 $t\to t_0$，则$P_1, P_2\to P_0$，即当 $t\to t_0$时，$Y\to y_0$，$y(t)\to y_0$；从而$Z\to y_0$。所以从（1.19)′和（1.18）我们有

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(t)}{y-Y}=F_y(x_0, y_0)\neq 0.$$

因而$\varphi(t)$和$y-Y$是同阶无穷小，又由（1.18)′可知$t-t_0$和$x-x_0$也是同阶无穷小。因此，$\varphi(t)$对$t-t_0$的无穷小的阶数与$y-Y$对$x-x_0$的无穷小的阶数相等。从此，若$\varphi(t)$的无穷小的阶大于n，则$y-Y$对$x-x_0$的无穷小的阶也大于n。上面已经阐明了这个事实，就是两曲线C_1和C_2具有n阶接触的一个充要条件。　　证毕。

推论　假定$C_1: F(x, y)=0$是一条代数曲线（即$F(x,y)$是x, y的多项式)。C_2在原点（0，0）的展开式为$y=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$；则$C_1$与$C_2$在原点构成$n$阶接触的一个充要条件是把$C_2$的展开式代进$F(x, y)=0$后，关于$x$的乘幂恒等地满足到$x^n$为止，即关于$x^1$，$x^2, \cdots, x^n$的系数都等于零。这个推论的证明留给读者作为练习。

例　求抛物形曲线

$$y=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

使其与曲线

$$y=\varphi(x)$$

在点 $(0,\varphi(0))$ 构成 n 阶接触。

解 根据定理2.4″，当 $x=0$ 和 $k=0,1,\cdots,n$ 时，

$$\frac{d^k}{dx^k}(\varphi(x)-a_0-a_1x-\cdots-a_nx^n)=0.$$

由此，即得

$$a_0=\varphi(0),\ a_1=\varphi'(0),\cdots,a_n=\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0).$$

因而，所求的抛物型曲线为

$$y=\varphi(0)+\varphi'(0)x+\frac{1}{2!}\varphi''(0)x^2+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)x^n.$$

5. 平面曲线的渐屈线与渐开线 曲率圆的中心叫做曲线的**曲率中心**。曲率中心的轨迹叫做曲线的**渐屈线**。曲线 $\mathbf{x}(s)$ 的曲率中心的向径为

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{x}(s)+\frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s),\tag{1.20}$$

这里 s 是 $\mathbf{x}(s)$ 的弧长，但不是它的渐屈线 $\mathbf{x}^*(s)$ 的弧长。对于曲率 $k(s)\neq 0$ 的C^2曲线的渐屈线是确定的。

$\mathbf{x}(s)$ 的**渐开线** $\mathbf{y}(s)$ 是这样的曲线，它在 $\mathbf{x}(s)$ 的任一切线上截取弧长 s，

$$\mathbf{y}(s)=\mathbf{x}(s)-s\mathbf{t}(s),\tag{1.21}$$

这时，s 也只是 $\mathbf{x}(s)$ 的弧长，而不是它的渐开线 $\mathbf{y}(s)$ 的弧长。对一切C^1曲线，渐开线是确定的，当弧长原点变更时，$s\to s-s_0$，则渐开线变为 $\mathbf{y}^*=\mathbf{x}(s)-(s-s_0)\mathbf{t}(s)$，因为渐开线除了某一任意常数$s_0$外是确定的，这个性质显示出渐开线可以是

某积分过程的结果(见方程 (1.20))。如果是这样,我们要求一条C^1曲线的渐开线是C^2曲线。渐屈线,跟导数一样,是唯一的;我们要求一条C^2曲线的渐屈线只是C^1曲线。其中所述的第一个结果Christian Huygens 在 1673 年出版的《微分几何》中有所叙述:一条曲线是它的诸渐开线的渐屈线与它的渐屈线的一条渐开线,正如一个函数是它的诸积分的导数与它的导数的一个积分,渐屈线的弧长是由原曲线 x 的曲率半径测量的。我们采用两个不同的方法来建立这些结果。

定理2 4" 一条C^2曲线 $\mathbf{x}(s)$ 的渐开线 $\mathbf{x}^*$是一条C^3曲线,作为它的弧长 s^*的一个函数。渐开线的曲率是 $k^*(s^*)=\frac{1}{s}$,和 $\mathbf{x}(s)$ 是它的渐开线的渐屈线 $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*_y$。

具有严格单调曲率的一条C^3曲线 $\mathbf{x}(3)$ 的渐屈线 $\mathbf{x}^*$是作为它的弧长 $s^*=\rho(s)+\text{const}$ 的一个函数的一条 C^2曲线。x 是它的渐屈线的渐开线,$\mathbf{x}=\mathbf{y}_{x^*}$。

由定义方程 (1.21)

$$\frac{dy}{ds}=-sk(s)\mathbf{n}(s),$$

它证明了下列结果:

1° 一条C^2曲线的渐开线是 x 的切线的一条正交轨线(即以 x 的切线作为它的法线)。

2° $$\frac{ds_y}{ds}=sk(s).$$

从此

$$\frac{dy}{ds_y}=-\mathbf{n}(s),\quad \frac{d^2y}{ds_y^2}=\frac{1}{s}t(s),$$

$$\frac{d^3y}{ds_y^3}=-s^{-3}k\mathbf{t}(s)+s^{-2}\mathbf{n}, \tag{1.22}$$

由此推出,渐开线的活动标架是 $\mathbf{t}_y=-\mathbf{n}$,$\mathbf{n}_y=\mathbf{t}$,y 除 $s=0$ 外,

是C^3曲线，并且它的曲率$k_y(s_y)=\frac{1}{s}$。由（1.20），$x_y^*=y(s_y)+\rho(s_y)n_y(s_y)=x(s)$。这证明了定理2.7的第一部分。

为了证明定理的第二部分，把方程（1.20）求导：$\frac{dx^*}{ds}=\rho'(s)n(s)$。从此

1° x的法线切于x^*。

2° $$\frac{ds^*}{ds}=\pm\frac{d\rho}{ds}，即$$

$$s^*(s_1)-s^*(s_0)=\pm(\rho(s_1)-\rho(s_0)), \tag{1.23}$$

符号的取舍使满足条件

$$\frac{ds^*}{ds}>0,$$

就是使弧长是一个严格单调上升函数。如果ρ通过一个相对极大或极小，则改变测量渐屈线的弧长方向，x的曲率半径变号。如果在曲线$x(s)$的内点出现曲率的一个极值，$\frac{dx^*}{ds}=0$，这时切线不能确定。具有非单调曲率的一条弧的渐屈线甚至不是C^1曲线。若曲率是单调和可微的，

$$\frac{dx^*}{ds^*}=\frac{dx^*}{d\rho}=n(s), \quad \frac{d^2x^*}{ds^{*2}}=-\frac{1}{\rho\rho'}t(s).$$

x^*是C^2曲线，则它有一条渐开线。

$$y_x^*=x(s)+\rho(s)n(s)-\rho(s)n(s)=x(s).$$

若曲率是单调的，则曲线是局部的凸曲线。一个单调函数至多变号一次。如果$k(s)$是定号的，则$\frac{d\theta}{ds}$也定号，因而$\theta(s)$是严格单调的，并从s_0到s的弧，只要$|\theta(s)-\theta(s_0)|<\pi$，是凸的，这表明，一个凸性条件自然地出现在定理2.4″中。

6. 包络线 假设给定依赖于一个参数α的一族平面曲线$\{C_\alpha\}$。一曲线族$\{C_\alpha\}$的包络线E是具有下列两个性质的任一曲线：

1° 对于E上每点P_{α_0}必有族中一曲线C_{α_0}在P_{α_0}与E相切。

2° 对于族中每一曲线C_{α_0}，在E上有这样一点P_{α_0}，使得C_{α_0}与E在P_{α_0}相切。

P_{α_0}叫做族中曲线C_{α_0}的特征点。

现设曲线族$\{C_\alpha\}$的方程为

$$\varphi(x, y, \alpha)=0, \tag{1.24}$$

其中α为一参数，假定函数$\varphi(x, y, \alpha)$具有连续的偏导数，并对每个参数α，使φ_x，φ_y不全为零。若曲线族（1.24）有包络线E存在，则由定义，E上各点必在族中某一曲线上，而这条曲线由参数α来确定，所以E上的点的坐标为参数α的函数：

$$x=x(\alpha), \quad y=y(\alpha), \tag{1.25}$$

并以这个方程组作为包络线E的参数方程。

既然E上各点都在族（1.24）中某一曲线上，所以把E的方程（1.25）代入（1.24），就得到关于α的一个恒等式：

$$\varphi\{x(\alpha), \ y(\alpha), \ \alpha\}=0. \tag{1.26}$$

把这个恒等式关于α求导，得

$$\varphi_x\frac{dx}{d\alpha}+\varphi_y\frac{dy}{d\alpha}+\varphi_\alpha=0. \tag{1.27}$$

对任一参数α，由于曲线(1.25)与族中曲线$\varphi(x, y, \alpha)=0$在点$(x(\alpha), \ y(\alpha))$相切，因此，两曲线在这点有公共切线，因而两曲线在这点的切线斜率

$$\frac{y'(\alpha)}{x'(\alpha)} \quad 与 - \frac{\varphi_x(x(\alpha), \ y(\alpha), \ \alpha)}{\varphi_y(x(\alpha), \ y(\alpha), \ \alpha)}$$

相等，从而得到

$$\varphi_x \cdot x' + \varphi_y \cdot y' = 0,$$

代入（1.27）便有

$$\varphi_\alpha = 0.$$

因此，$x(\alpha)$，$y(\alpha)$ 应满足方程组

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0, \quad \varphi_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

就是说，如果包络线存在，它必须满足这个方程组。反过来，如果从这个方程组消去 α 得到关系式 $f(x, y) = 0$，或从这个方程组解出 $x = x(\alpha)$，$y = y(\alpha)$，并且 φ_x，φ_y 以及 $x'(\alpha)$，$y'(\alpha)$ 都不全为零，则把以上的步骤倒推回去，就可得到曲线 $x = x(\alpha)$，$y = y(\alpha)$ 与曲线 $\varphi(x, y, \alpha)$ 在点 $(x(\alpha), y(\alpha))$ 相切的结论，从而 $x = x(\alpha)$，$y = y(\alpha)$ 是曲线族 $\varphi(x, y, \alpha) = 0$ 的包络线。

例 弹道曲线是抛物线

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}\sec^2\alpha \cdot x^2,$$

式中 v_0 为初速，α 为发射角。当 α 变化时，就得到一抛物线族，求其包络线。

解 这时方程 $\varphi(x, y, \alpha) = 0$ 为

$$-y + \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}\sec^2\alpha \cdot x^2 = 0,$$

而 $\varphi_\alpha(x, y, \alpha) = 0$ 为

$$\sec^2\alpha \cdot x - \frac{g}{v_0^2}\sec^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot x^2 = 0.$$

从后一式得到 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gx}$，从而 $\sec^2\alpha = 1 + \frac{v_0^4}{g^2x^2}$，代入第一式便得

$$y=\frac{v_0^2}{g}-\frac{1}{2}\ \frac{gx^2}{v_0^2}\left(1+\frac{v_0^4}{g^2x^2}\right),$$

即

$$y=\frac{1}{2}\ \frac{v_0^2}{g}-\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}x^2.$$

这是另一条抛物线，这是所求抛物线族的包络。

设炮弹的初速为 v_0，则在上面求得的包络以外，飞行物就不会被击中。这里假定炮弹在同一平面上发射，如果考虑到炮弹在不同平面上发射，飞行物应在由上面的包络线绕 y 轴的旋转抛物面之外，才不会被击中。

7. 螺旋弧 具有定号单调曲率的曲线弧称为螺旋弧。

螺旋弧的一段充分小的子弧总是一条凸曲线。如果一螺旋弧 $\mathbf{r}$ 包含一段常曲率子弧，则子弧属于它自身的曲率圆。一条螺旋弧 $\mathbf{r}$ 的渐屈线不包含任何直线段，因为 $\mathbf{n}$ 的方向不是固定的。这表明，连结渐屈线 $\mathbf{r}^*$ 的两点的弧长总大于两点间的距离，或即 $\mathbf{r}$ 的两曲率中心的距离小于对应曲率半径之差。较小的曲率圆完全在较大的曲率圆的内部，于是我们有

定理2.5(Kneser) 一条螺旋弧的任一曲率圆包含弧的每个较小的曲率圆在其内部，而它自身也包含在半径较大的每个曲率圆之内。

推论 一螺旋弧的两个不同的曲率圆决不相交。这样的一条弧不是它的曲率圆的包络。

图2.4表示一椭圆的一螺旋弧的某些曲率圆。

一螺旋弧的一点 $P=\mathbf{r}(s_0)$ 把弧分为两支，曲率上升，$k(s)>k(s_0)$ 的一支，和曲率下降，$k(s)<k(s_0)$ 的一支。Kneser定理给定平面内对两条支线的不同区域：

定理2.6 如果一螺旋弧的曲率在 s_0 的邻域中不是常数，则曲率上升的一支线是完全包含在曲率圆 $s_r(s_0)$ 的内部，而曲率下降的一支线是在 $s_r(s_0)$ 的外部。

现在要描述关于凸螺旋弧的一个定理：

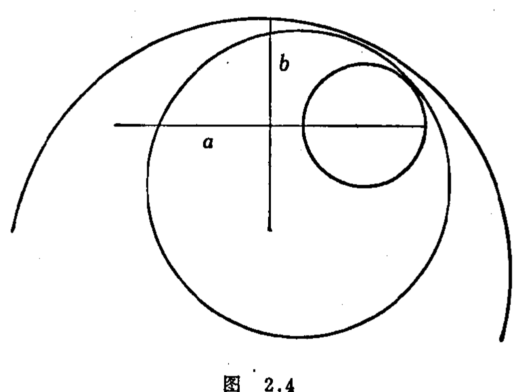


图 2.4

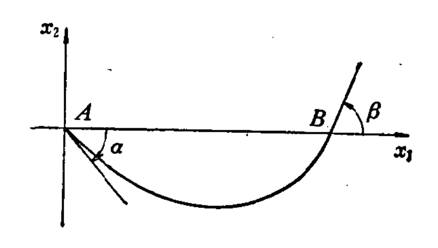


图 2.5

定理2.7(Vogt) 设A，B是一螺旋弧的端点，它的曲率从A到B不下降。在B点的切线与弧在B的弦AB的交角β不小于在A的切线与AB的交角α。只当曲率是常数时，$\alpha=\beta$。

证 (图2.5) 取AB为x_1轴使得弧AB的内点$x_2(s)<0$，$x_2(0)=x_2(l)=0$。这里l是弧AB的长。我们必须证明$\theta(l)=\beta\geqslant 2\pi-\theta(0)=\alpha$，或即$\cos\theta(l)\leqslant\cos\theta(0)$。由假定，$k(s_{i+1})-k(s_i)\geqslant 0$，对区间[$0$，$l$]的任一分法，由分部积分法推出：

$$\cos\theta(0)-\cos\theta(l)=\int_0^{\theta(l)}\sin\theta d\theta=\int_0^l x_2'(s)k(s)ds$$

$$=-\int_0^l x_2(s)dk(s)\geqslant 0.$$

等式只当k在[0，l]上是常数时成立。

8. 四顶点定理 上面所叙述的内容（除定理2.7外）基本上都是关于曲线上各点邻域的性质，就是局部性质。但是局部性质与整体（大范围）性质之间有一定的联系。现在以闭曲线作为例子来阐明它的意义。

所谓凸闭曲线就是与平面上的任何直线的交点不多于两点的闭曲线，凸闭曲线又名为卵形线。

在一条C^2曲线上曲率取极值的点称为它的顶点。我们在分析中知道一个连续函数在闭区间上至少有一个极大值和一个极小值。这表明，一条C^2闭曲线至少有两个顶点。我们可以进一步证明

定理2.8 设一C^2闭曲线的曲率半径ρ为弧长s的连续函数，则它至少有四个顶点。

在证明这个定理之前，先作如下的阐明。这个定理本身不仅与曲线的部分有关，而且还与曲线的全体有关，并且以顶点这个局部性质（因为所论k的极值是指相对极值，就是在曲线上各点邻近考虑ρ的值）为基础。因此，在局部性质的基础上来研究整体性质的微分几何称为整体（大范围）微分几何。因而研究图形的局部性质的局部微分几何有时又称为局部（小范围）微分几何。整体微分几何的内容较难，它所涉及的知识较广，与黎曼几何、拓扑学、变分法、李群论等都有联系，它成为现代微分几何的中心，这些内容出于本书范围，略而不述。

现在来证明定理2.8。

设s为曲线的弧长，$\rho(s)$为曲率半径，θ为正向切线与正x_1轴的交角，则由(1.8)，

$$\rho=\frac{ds}{d\theta}. \text{ 又因} \frac{dx_1}{ds}=\cos\theta, \quad \frac{dx_2}{ds}=\sin\theta;$$

由积分，得

$$x_1-x_{10}=\int_{s_0}^{s}\cos\theta ds=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\rho(\theta)\cos\theta d\theta,$$

$$x_2 - x_{20} = \int_{S_0}^{S} \sin\theta ds = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho(\theta) \sin\theta d\theta.$$

由于曲线是凸闭的，所以$\rho > 0$，并因为

$$\rho\cos\theta = \frac{dx_1}{d\theta}, \quad \rho\sin\theta = \frac{dx_2}{d\theta},$$

所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho\cos\theta d\theta = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \rho\sin\theta d\theta = 0. \tag{1.28}$$

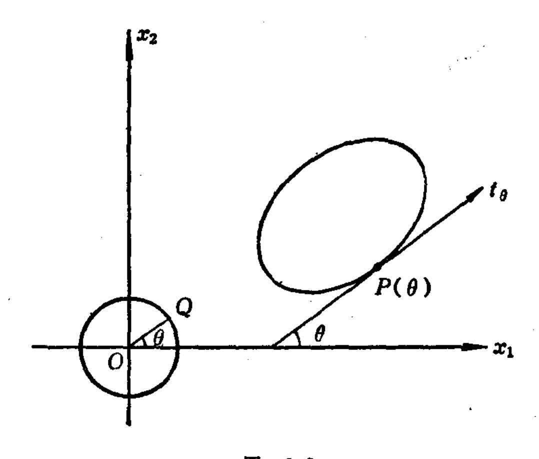


图 2.6

现在在曲线上任一点$P(\theta)$引正向切线t_θ，假设从原点O引t_θ的平行射线与单位圆交于点Q（图2.6），则卵形线上的点P与单位圆上的点Q构成一一对应，这时点Q的坐标显然是

$$x^* = \cos\theta, \quad y^* = \sin\theta.$$

当P绕卵形一周时，Q绕单位圆一周。

我们把卵形线在点$P(\theta)$的曲率半径$\rho(\theta)$作为质量，放在单位圆上的对应点Q处，于是单位圆上各点都有相应的质量，而这个质量系的重心的坐标$\bar{x}_1$，x_2由下列公式给出：

$$\bar{x}_1=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}\rho\cos\theta d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi}\rho d\theta},\ \bar{x}_2=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}\rho\sin\theta d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi}\rho d\theta}.$$

由方程（1.11）立刻推出$\bar{x}_1=0$，$\bar{x}_2=0$，这就是说，质量系的重心为圆心O。根据假定，$\rho(\theta)$在闭区间$-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$上为$\theta$的连续函数，所以至少有一个极大值和一个极小值，而且极大和极小一定是交替出现的；因而顶点的个数必为偶数。据此，我们只要证明，只有两个顶点的卵形线是不存在的。为此，假定有这样的卵形线，它的曲率半径ρ只有一个极大值和一个极小值，它们的对应顶点记作P_1和P_2，令Q_1，Q_2分别为P_1，P_2在单位圆上的对应点。沿单位圆周所移动的方向不论是反时针或顺时针的，从Q_1到Q_2的各点所放的质量是沿着道路而减少的，而从点Q_2到Q_1的各点所放的质量是增加的。作平分圆弧$\overset{\frown}{Q_1Q_2}$的直径CD，则在半圆DQ_1C上的质量大于在半圆CQ_2D上的质量。这样，则重心决不能落在圆心O处，这与上述结果矛盾，所以只有两个顶点的卵形线是不存在的，因此，顶点至少有四个。

这个证明法是由 Blaschke 给出的，它的优点在于只要假定函数$\rho(s)$的连续性就够了。

若假定曲率$k(s)$是连续可微的，则有更巧妙的证明法，这是下面所述的Herglotz的证明。

设两个顶点P_1，P_2的联线P_1P_2的方程为

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3=0\quad(a_1,a_2,a_3\text{为常数}),$$

则这条直线把凸闭曲线分为两部分$\overset{\frown}{P_2P_1}$与$\overset{\frown}{P_1P_2}$；对于这两部分的点(x_1,x_2)所对应的$a_1x_1+a_2x_2+a_3$之值必取异号，若$\overset{\frown}{P_2P_1}$上的点在直线P_1P_2的正侧，则$a_1x_1+a_2x_2+a_3>0$，而对应于$\overset{\frown}{P_1P_2}$的点则有$a_1x_1+a_2x_2+a_3<0$。其次，以$k(s)$表示凸闭曲线的曲率，若假定只有两个顶点P_1，P_2，则$\frac{dk}{ds}$只在P_1,P_2等于0，

于是沿凸闭曲线从 P_2 到 P_1，$\frac{dk}{ds}$不变号，例如$\frac{dk}{ds}>0$，则从 P_1 到 P_2 时$\frac{dk}{ds}<0$。

因此除P_1，P_2两点外，在整条曲线上都有

$$(a_1x_1+a_2x_2+a_3)\frac{dk}{ds}>0,$$

于是沿凸闭曲线的线积分

$$\oint(a_1x_1+a_2x_2+a_3)dk>0,$$

另一方面，由于

$$\oint dk=0, \oint \mathfrak{x}dk=-\oint k\mathfrak{t}ds=\oint d\mathfrak{n}=0.$$

从此，$\oint x_1dk=\oint x_2dk=0$。所以，对任意的常数 a_1, a_2, a_3 必有

$$\oint(a_1x_1+a_2x_2+a_3)dk=0.$$

这与上面的不等式矛盾。所以只有两个顶点的凸闭曲线不存在。

实际上，我们可以证明椭圆确实有四个顶点，就是椭圆与它的主轴的四个交点。因此，闭曲线顶点的最小数等于四，就是说，一般来讲，四个这个数目不能再加大了。

让读者证明：

1° 证明椭圆有四个顶点。

2° 证明曲线

$$x_1^4+x_2^4=1$$

有八个顶点，它们分别落在下列四条直线上：

$$x_1=0, \quad x_2=0, \quad x_1\pm x_2=0.$$

附注：关于卵形线的四顶点定理，最初给予证明的是印度加

尔各答大学教授S. Mukbopadhyaya. 他的论文登在 Bull. Calcutta Math. Soc. I(1909)，而久未为世人所知。到了1912年A. Kneser在其H. Weber纪念论文中重新发现了这个定理。1913年Blaschke 给出上述的证明。至今还有其他许多证明法。

9. 等周问题 古代希腊几何中有一个著名的问题，通称为等周问题：在平面区域上具有给定长度的一切闭曲线中寻求面积最大的一曲线。

设一条闭曲线C的周长是L，则$x(0)=x(L)$，所以

$$L=\oint ds=\oint \mathbf{t}\cdot\mathbf{t}ds=\oint\mathbf{t}\cdot d\mathbf{x}=-\oint\mathbf{x}d\mathbf{t}.$$

定义 若给定一个集合S，则中心是S的点半径为h的一切闭圆盘的和集称为集合S的距离h的平行集，记作S_h。若S是由一条闭曲线C围成的，则S_h的边界称为C的平行曲线，记作C_h。

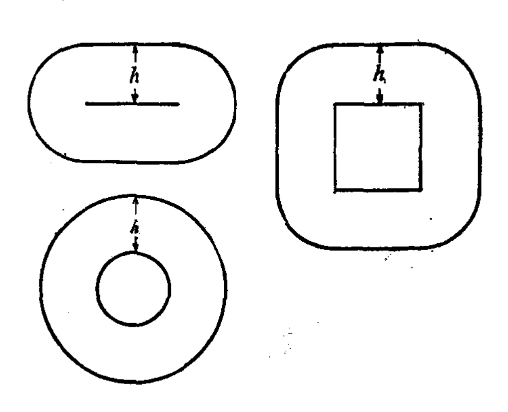


图 2.7

若S是点P，则平行集S_h是以P为中心h为半径的圆。图2.7分别表示一线段、一正方形和一圆的平行集。

定理2.9(Steiner) 设L为一简单可求长闭曲线的周长，A是C的内部的面积，并设L_h，A_h分别表示C的平行曲线C_h的对

应量，则

$$L_h \leqslant L + 2\pi h, \tag{1.29}$$

$$A_h \leqslant A + Lh + \pi h^2. \tag{1.30}$$

在这两个关系式中，对凸曲线C等号成立。

我们假定已经取定s上升的方向使得$\mathbf{n}$为内法线。

若C是一C^1凸曲线，则$C_h(s)=C(s)-h\mathbf{n}(s)$，$\mathbf{t}_h(s)=\mathbf{t}(s)$，$d\mathbf{t}=\mathbf{n}d\theta$；从此，$L_h=-\oint(C-h\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}d\theta=L+h2\pi$。

若C是一条C^0凸曲线，则它至多只有一个可数的尖点集合，对应于弧长的值s_i，$i=1$，…，设

$$\Delta_i=\theta(s_i+0)-\theta(s_i-0)$$

为在一尖点处的单侧切线的交角，$\sum_{i=0}^{\infty}\Delta_i\leqslant 2\pi$。(图 2.8)。$C$的内部的平行集是由下列图形包围而成的：弧$C(s)-h\mathbf{n}$，$s_i<s<s_{i+1}$，$i=1$，…，半径$h$，中心$C(s_i)$的圆弧以及小孔$\Delta_i$。$C$是凸闭曲线；从此

$$\sum_i\Delta_i+\sum_i[\theta(s_{i+1}-0)-\theta(s_i+0)]=2\pi$$

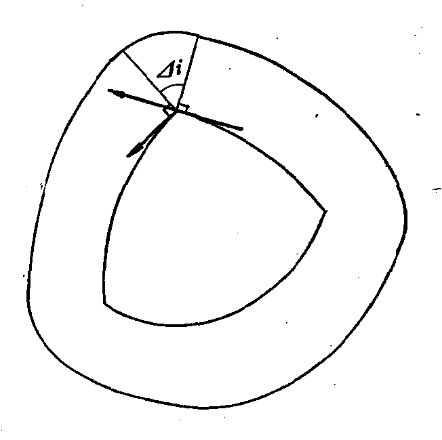


图 2.8

和

$$L_h = L + h\Sigma_i \int_{s_{i+0}}^{s_{i+1}^{-0}} d\theta + h\Sigma_i \Delta_i = L + 2\pi h.$$

若C不是凸的，则曲线$C - h\mathrm{n}$的部分或者连结这种平行弧的圆弧可以嵌入一个平行集中（图2.9）。从此，在这个情形下，$L_h \leqslant L + 2\pi h$。

方程（1.29）已经完全证明了，又（1.30）对凸曲线的情形借积分

$$A_h = \int_0^h L_p dp + A$$

可以推得。

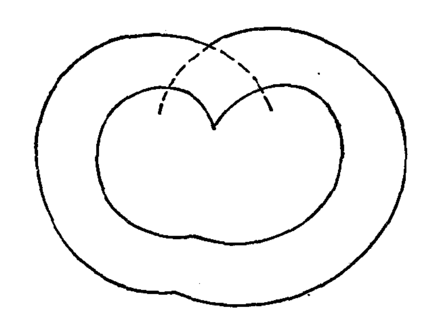


图 2.9

定义 一条简单闭曲线的一个*内切圆*是指半径最大的一个内切圆。

内切圆不是唯一的，但是内切圆半径是唯一的。一个内切圆的中心是曲线的一个内心。内心和内径出现在下面的*等周不等式*中：

定理2.10 设r是一条可求长闭曲线C的内径，a是C通过一个内心的任一弦的长度，则

$$L^2 - 4\pi A \geqslant \frac{\pi^2}{4}(a - 2r)^2. \tag{1.31}$$

从（1.31）可见，只当通过内心的每条割线是内切圆的一条直径，即C与它的内切圆重合时$L^2=4\pi A$。

推论 在周长L的一切闭曲线之间，半径为$L/2\pi$的圆确定最大面积。

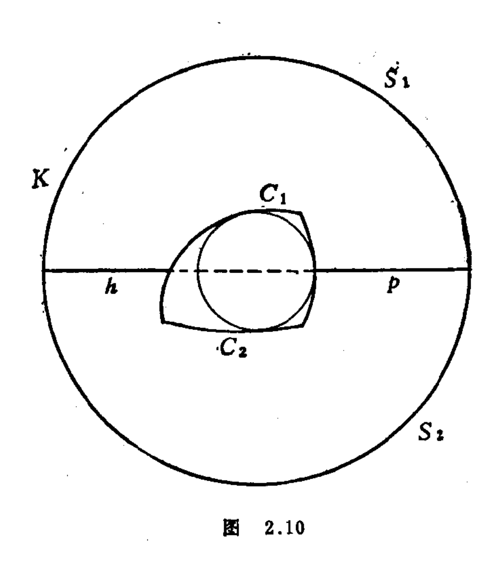


图 2.10

只要对凸曲线证明不等式(1.31)。因为，若C不是凸的，它包含在一个最小的凸区域(图2.11)中.这个区域的边界是凸的；它有一个较小的周长，并确定比非凸曲线C有一个较大的面积. 由此可见，非凸曲线不是我们的问题的解.(因$L^*<L$，$A^*>A$，从而$L^2-4\pi A>L^{*2}-4\pi A^*\geqslant 0$.所以对一般的闭曲线$L^2-4\pi A>0$。)

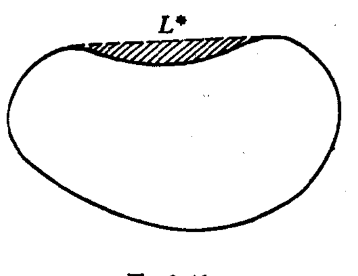


图 2.11

为了证明定理2.10，作一个半径为R的大的圆K，它的中心是C的一个内切圆的中心，使得C包围在这个圆K内（图2.10)。通过内心画一条直线与C切出一条长为$a\geqslant 2r$的一条割线，并与C和圆K之间的开环区域切出线段h，p。这条直线把C同圆分

别分为两条弧C_1和C_2，S_1，S_2。环形区域分成两个区域，它们的边界是两条闭曲线，记作

$$\Gamma_1=\{S_1pC_1h\},\ \Gamma_2=\{S_2hC_2p\}.$$

令L_i为C_i（$i=1,2$）的长度，A_i为Γ_i所围成的面积。L和A是C自身的周长和所包围的面积，则

$$L=L_1+L_2, \tag{1.32}$$

$$\pi R^2=A+A_1+A_2. \tag{1.33}$$

设ρ是一个实数，使得

$$2r\leqslant 2\rho\leqslant a. \tag{1.34}$$

我们按距离ρ来构造平行区域如下：

（a）由圆K和C构成的环形区域的平行区域，由（1.34），它覆盖C的整个内部；它的面积是$\pi(R+\rho)^2$。

（b）线段h和p的平行区域（面积分别为$\pi\rho^2+2h\rho$，$\pi\rho^2+2p\rho$，见图2.7）。

（c）由Γ_1和Γ_2确定的区域的平行区域，对相应的面积设为A_i^*，不等式（1.30）表示

$$A_i^*\leqslant A_i+(L_i+h+p+\pi R)\rho+\pi\rho^2.$$

在面积（a）内的任一点至少在（c）的两区域的一个之内，并在面积（b）的一个内的任一点是在（c）的两个区域内，从此

$$\text{面积(a)}+\text{两面积(b)}\leqslant A_1^*+A_2^*,$$

或即

$$\pi(R+\rho)^2+2\pi\rho^2+2(h+p)\rho\leqslant A_1+A_2+(L_1+L_2)\rho$$
$$+2(h+p+\pi R)\rho+2\pi\rho^2.$$

在这个不等式中，许多项或者直接或者利用（1.32）和（1.33）消去，所有剩下的项是

$$A\leqslant L\rho-\pi\rho^2.$$

这个关系等价于

$$L^2-4\pi A\geqslant(L-2\pi\rho)^2, \tag{1.35}$$

这是等周不等式的另一个形式。在这个不等式中，我们先令 $\rho=r$，然后令 $\rho=\frac{a}{2}$，并把两个不等式相加，便得

$$2(L^2-4\pi A)\geqslant(L-2\pi r)^2+(L-\pi a)^2. \tag{1.36}$$

利用代数不等式

$$2(x^2+y^2)\geqslant(x-y)^2,\ \text{即}x^2+y^2\geqslant\frac{1}{2}(x-y)^2,$$

令 $x=L-2\pi r$， $y=L-\pi a$，则从 (1.36) 就可推出不等式 (1.31)。 证毕。

§2.2. 空间曲线的欧氏微分几何

在本节里，着重论述 E^3中的曲线。E^3 的欧氏运动群有六个参数（对旋转和平移各有三个），也就是六维的李群。最后简略地介绍高维欧氏空间E^n中的曲线。

1. 曲线的参数表示 象平面曲线那样，E^3 中曲线的参数方程可写为如下的形式：

$$x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\ x_3=x_3(t),\ a\leqslant t\leqslant b, \tag{2.1}$$

式中 (x_1, x_2, x_3) 表示空间中点的笛氏坐标。今后假定

函数 $x_1(t)$，$x_2(t)$，$x_3(t)$在一点 t_0 的充分小的邻域里都是单值、连续可微的，并且

$$\dot{x}_1^2(t)+\dot{x}_2^2(t)+\dot{x}_3^2(t)>0. \tag{2.2}$$

以后所考虑的函数 $x_i(t)$ $(i=1, 2, 3)$ 总是假定单值、连续可微的，并且按我们的需要，这些函数都有直到 r 阶的连续导数，并称曲线 (2.1) 为 C^r 曲线。本节里如无特别声明，都规定曲线是C^r $(r\geqslant3)$ 的。

2. 活动标架 Frenet公式. 基本定理与自然方程.

一条C^3曲线$\mathbf{x}(t)=(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))$的不变参数$s$是弧长：

$$s=\int_{t_0}^{t}|\dot{x}(t)|dt, \tag{2.3}$$

切向量$\mathbf{t}=\dot{x}(s)$是单位向量（与(2.1.2)比较）.

固定笛氏坐标系是由标准正交向量$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_i$. $\mathbf{e}_i=1$, $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j\neq 0$ ($i\neq j$, $1\leqslant i$, $j\leqslant 3$)的一个标架给定的. 矩阵$(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)=+1$. (($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$)成右向系统). 对点$\mathbf{x}(s)$附上另一个标准正交标架$\mathbf{a}_1(s)=\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{a}_2(s)$, $\mathbf{a}_3(s)$, 它是从固定标架经过一个旋转而导出的：

$$\{\mathbf{t},\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}=A(s)\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\},\quad A(s)\in O_3^*,$$

则

$$\{\mathbf{t},\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}'=C(A)\{\mathbf{t},\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}(\text{因}\,C(A)=A'A^{-1}). \tag{2.4}$$

Cartan矩阵是反称的：

$$C(A)=\begin{pmatrix}0 & P_{12} & P_{13}\\ -P_{12} & 0 & P_{23}\\ -P_{13} & -P_{23} & 0\end{pmatrix}.$$

若$P_{12}(s)=P_{13}(s)=0$, 则由(2.4)可知, $\mathbf{t}'=x''=0$, 从而$\mathbf{x}(s)=as+b$, 于是曲线是一直线. 若$P_{12}=P_{13}=0$, $P_{23}\neq 0$, 则标架$\{\mathbf{t},\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$沿这直线的方向运动而轴$\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$在垂直于这直线的平面上旋转.

如果$\mathbf{t}'(s)\neq 0$, 我们取

$$\mathbf{a}_2=\frac{t'(s)}{|t'(s)|}=\mathbf{n}(s)$$

作为第二个向量, 叫做曲线的主法线. 第三个向量$\mathbf{a}_3=\mathbf{b}(s)$, 叫做副法线. 它是同时垂直于$\mathbf{t}$和$\mathbf{n}$, 且由$\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$所张成的体积$|\mathbf{tnb}|=+1$的唯一的向量. 平面$(\mathbf{x},\mathbf{t},\mathbf{n})$叫做密切平面, 平面$(\mathbf{x},\mathbf{n},\mathbf{b})$

叫做法平面，平面(x, b, t) 叫做从切面. {x, t, n, b}叫做曲线的伴随三面形或活动标架. 由作图，$P_{13}(s)=0$；因而$C(A)$化为如下的形式：

$$C(A)=\begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.5)$$

现在因为标架是唯一决定的，所以$k(s)$与$\tau(s)$是不变量，它们分别叫做一空间曲线的曲率与挠率.

这时公式(2.4)可写为

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \quad * \qquad k\mathbf{n} \quad * \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -k\mathbf{t} \quad\; * \qquad \tau\mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= \quad * \quad -\tau\mathbf{n} \quad * \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)'$$

其中星号表示缺项. 这组公式是空间曲线论的基本公式，通称为Frenet公式；因为以后会看到，空间曲线的微分几何的性质都是在这公式的基础上导出来的. 它的基本特点就是基本向量t, n, b关于弧长s的导数可以用t, n, b的线性组合来表达，它的系数组成反称矩阵 (2.5) .

公式(2.4)′与$\dfrac{dx}{ds}=\mathbf{t}$合并起来描述了：当点$x$在曲线上移动时活动标架的运动规律.

根据积分定理1.16，我们得到

空间曲线论的基本定理 在闭区间$a\leqslant s\leqslant b$上给定任二连续函数$k(s)>0$，$\tau(s)$和在$\mathbf{x}(s^*)$的初始标架$\{\mathbf{t}(s^*), \mathbf{n}(s^*), \mathbf{b}(s^*)\}$唯一地存在一条$C^3$空间曲线，它通过$\mathbf{x}(s^*)$并在$\mathbf{x}(s^*)$有切线$\mathbf{t}(s^*)$以及容许$k(s)$，$\tau(s)$作为它在任意点的曲率与挠率.

方程 $k=k(s)$，$\tau=\tau(s)$叫做空间曲线的自然方程。引用积分定理1.16可知除了迭合外，自然方程决定一空间曲线，以上所述的事实表明，空间曲线的全部性质集中于曲率 $k(s)$和挠率 $\tau(s)$中。

上述定理是一个局部 定理。如 果在 某点 $\mathbf{x}''(s)=\mathbf{x}'''(s)=0$，则不需要连续的标架族$\{\mathbf{x},\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}\}$存在。

从Frenet方程(2.4)′推出

$$\mathbf{x}'=\mathbf{t},$$

$$\mathbf{x}''=k\mathbf{n},$$

$$\mathbf{x}'''=-k^2\mathbf{t}+k'\mathbf{n}+k\tau\mathbf{b}.$$

曲率

$$k=|\mathbf{x}''| \tag{2.6}$$

是一个二阶不变量，和挠率

$$\tau=\frac{1}{k^2}|\mathbf{x}',\mathbf{x}'',\mathbf{x}'''| \tag{2.7}$$

是一个三阶不变量。由定义，一条空间曲线（甚至浸入三维空间中的一平面曲线）的曲率总是正的；这个定义不是完全等价于§2.1中的定义。挠率 τ 的符号自身是一个不变量；公式(2.7)表明三个向量$\mathbf{x}',\mathbf{x}'',\mathbf{x}'''$是确定一个右手还是左手斜交坐标系。

向量函数$\mathbf{t}(s)$决定曲线 $\mathbf{x}(s)=\mathbf{x}_0+\int_{s_0}^{s}\mathbf{t}(\sigma)d\sigma$。于是提出这样的问题：向量函数 $\mathbf{n}(s)$是否也决定曲线？这里一个预备的问题是：两条不同曲线 $\mathbf{x}(s_x)$和 $\mathbf{y}(s_y)$可否有相同的主法线？如果可能的话，则$\mathbf{y}(s_y)$必在过$\mathbf{x}(s_x)$的主法线上，这时，可写出

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}(s_x)+\lambda(s_x)\mathbf{n}_x(s_x).$$

λ是一个可微函数，$\mathbf{n}_x$和$\mathbf{n}_y$分别为这两曲线的主法线。由微分

$$\mathbf{t}_y=[(1-k_x\lambda)\mathbf{t}_x+\lambda'\mathbf{n}_x+\lambda\tau_x\mathbf{b}_x]\frac{ds_x}{ds_y}.$$

由于 $\mathbf{n}_x=\mathbf{n}_y$ 与 $\mathbf{t}_y$ 正交；从此

$$\lambda'=0.$$

所以 λ 是一个常数，从而 $\mathbf{t}_y$ 是在 $\mathbf{t}_x$ 和 $\mathbf{b}_x$ 所决定的平面上，因而可写

$$\mathbf{t}_y=\mathbf{t}_x\cos\alpha(s_x)+\mathbf{b}_x\sin\alpha(s_x).$$

从此

$$\mathbf{n}_y k_y\frac{ds_y}{ds_x}=(k_x\cos\alpha-\tau_x\sin\alpha)\mathbf{n}_x+\mathbf{t}_x(\cos\alpha)'+\mathbf{b}_x(\sin\alpha)'.$$

如前，推出 $\alpha'=0$，于是 $\mathbf{t}_x$ 和 $\mathbf{t}_y$ 之间的角度 α 是常数。对 $\mathbf{t}_y$ 的两个方程

$$\mathbf{t}_y=[(1-k_x\lambda)t_x+\lambda\mathbf{t}_x\mathbf{b}_x]\frac{ds_x}{ds_y},$$

$$\mathbf{t}_y=\cos\alpha\mathbf{t}_x+\sin\alpha\mathbf{b}_x$$

是一致的充要条件是系数行列式等于零，即

$$\sin\alpha-\lambda(k_x\sin\alpha+\tau_x\cos\alpha)=0. \tag{2.8}$$

故得

Bertrand 定理 在 E^3 中一曲线（除平移外）由它的主法线来刻划的充要条件是它的曲率和挠率之间没有常系数的线性关系成立。

定义 设两条不同曲线 C_1, C_2 有相同的主法线，则 C_1 和 C_2 都称为 Bertrand 曲线，每一条称为另一条的共轭曲线。方程（2.8）叫做 Bertrand 曲线的特征方程。（因为可证若一曲线 C 的曲率与挠率满足常系数的线性关系，则 C 为一Bertrand曲线。）

下列几个例题的证明让读者去完成：

例1 一般螺旋线。如果一条曲线 C 的切线与一固定方向 $\mathbf{d}$ 交于定角，$\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{d}=\cos\alpha$，则称 C 为一般螺旋线。证明，对一切 s，$\mathbf{d}$ 是在从切面上，并证 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{k}{\tau}$。

例2 如果 $\frac{k}{\tau}=\operatorname{tg}\alpha$ 是常数，证明向量 $\mathbf{d}=\mathbf{t}\cos\alpha+\mathbf{b}\sin\alpha$

是固定方向。从此与例 2 推出 $\frac{k}{\tau}=\text{const}$ 刻划一般螺旋线，因而称这个方程为一般螺旋线的特征方程。

例3 给定两曲线 $\mathbf{f}(s)$，$\mathbf{g}(s)$，使得 $\mathbf{n}_f(s)=\mathbf{n}_g(s)$，则

$$k_f(s)=ak_g(s)+b\tau_g(s)\ (a,\ b\text{是常数}). \qquad (2.9)$$

如果 $k_f(s)=\text{const}$，证明$\mathbf{g}$是一Bertrand曲线（Bianchi）定理。

例4 假如两条曲线的点之间可以建立这样的对应关系，使它们在对应点的切线平行，则主法线和副法线也平行，并且曲率和挠率成比例：

$$k^*:\tau^*=k:\tau. \qquad (2.10)$$

例5 设两曲线在对应点的主法线互相平行（不是重合），证明它们在对应点的切线组成定角。

例6 如果两曲线在对应点的副法线重合，证明它们重合或都是平面曲线。

例7 Mannheim曲线。设一条曲线 C_1 的主法线与另一条曲线 C_2 的副法线重合，则 C_1 叫做 Mannheim曲线。证明

$$k=\lambda(k^2+\tau^2)\ (\lambda\text{为一个常数}).$$

例8 设曲线 C 的方程为 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$，证明

$$(\mathbf{x}'',\mathbf{x}''',\mathbf{x}^{(iv)})=k^5\left(\frac{\tau}{k}\right)'.$$

由此可见，曲线 C 为一般螺旋线的一个充要条件是 $(\mathbf{x}'',\mathbf{x}''',\mathbf{x}^{(iv)})=0$。

例9 常挠率曲线　设 $h(t)$，$k(t)$，$l(t)$ 为参数 t 的任意三个函数，C 为一个常数，证明方程

$$x=C\int\frac{k\dot{l}-\dot{k}l}{h^2+k^2+l^2}dt,\quad y=C\int\frac{l\dot{h}-\dot{l}h}{h^2+k^2+l^2}dt,$$

$$z=C\int\frac{h\dot{k}-\dot{h}k}{h^2+k^2+l^2}dt \qquad (2.11)$$

确定一条常挠率曲线。

3. 曲率与挠率 若从原点O作单位向量μ平行于一条空间曲线C的单位向量$\mathbf{t}$，则称这种单位向量的端点在一个单位球面上所描绘的曲线为曲线C的球面表示，又称为切线象，记作Γ。设Γ的弧长为σ，μ为向量$\mathbf{x}$的切线象，我们有

$$d\sigma^2=d\mu^2=d\mathbf{t}^2,$$

由此，因为$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\mathbf{x}''=k\mathbf{n}$，所以$\left(\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right)^2=\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2=k^2$，推出

$$k=\frac{d\sigma}{ds}. \tag{2.12}$$

假设$\mathbf{x}_1=\mathbf{x}(s+\Delta s)(\Delta s>0)$是$\mathbf{x}(s)$的邻点，并设$\mu_1=\mu(\sigma+\Delta\sigma)$是它的球面象。

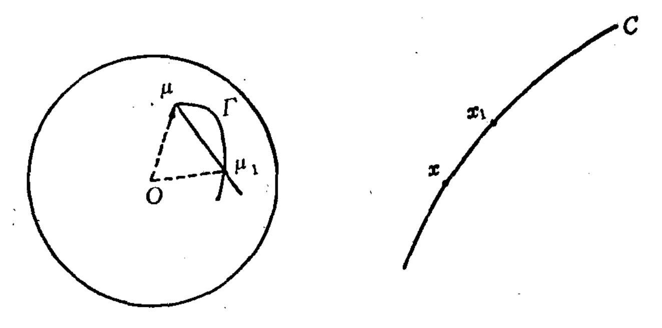


图 2.12

现在考虑通过μ和μ_1的端点在球面上的最小大圆弧，记作$|\mu\mu_1|$；以$\Delta\theta$表示它的弧长，这同时又是C在$\mathbf{x}$和$\mathbf{x}_1$的切线的交角，而且$\frac{\Delta\theta}{|\mu\mu_1|}=1$，从此

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\sigma}{|\mu\mu_1|}\ \frac{|\mu\mu_1|}{\Delta s}\lim_{\Delta s\to 0}\ \frac{|\mu\mu_1|}{\Delta s}$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\mu\mu_1|}{\Delta\theta}\ \frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}. \tag{2.13}$$

因此，曲率是邻角对弧长之比的极限（所谓邻角是指在二邻点$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}$的二切线的夹角）。

令$R=\frac{1}{k}$，叫做曲线C的曲率半径，这是曲线C在$\mathbf{x}$的密切圆或曲率圆的半径。事实上，通过$\mathbf{x}$的圆可以考虑作以此圆为大圆的球面与通过$\mathbf{x}$和球心O的平面的交线；我们有方程

$$O\mathbf{x}^2=r^2,$$

$$O\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}=0,$$

式中r表示圆的半径，$\mathbf{A}$为某一向量。从此求导两次，推出

$$O\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}=0,\quad 1+k\mathbf{n}\cdot O\mathbf{x}=0,$$

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{A}=0,\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}=0.$$

从后两式看到，向量$\mathbf{A}$与向量$\mathbf{b}$共线，即O点必在密切平面上，则方程$O\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}=0$表明$O$在主法线上；关系式$1+k\mathbf{n}\cdot O\mathbf{x}=0$表示$\mathbf{x}O=R\mathbf{n}$。因而我们有$r=R$。因此，曲率圆的半径等于$R$，而它的中心叫做空间曲线$C$的曲率中心，落在主法线上。

现在要给出挠率$\tau(s)$的几何意义。以$\Delta\varphi$表示曲线C在$\mathbf{x}$和$\mathbf{x}_1$的密切平面之间的交角，则可证明：

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|=|\tau|. \tag{2.14}$$

事实上，若C在$\mathbf{x}(s)$的曲率$k(s)\neq 0$，则由于连续性，在$\mathbf{x}(s+\Delta s)=\mathbf{x}_1$的$k(s+\Delta s)\neq 0$。在$k\neq 0$的每点，向量$\mathbf{x}'(s)$和$\mathbf{x}''(s)$都不等于零，而且不平行，所以在$\mathbf{x}$的每一邻点$\mathbf{x}_1$都有确定的密切平面。

设$\mathbf{b}(s)$和$\mathbf{b}(s+\Delta s)$分别为曲线C在$\mathbf{x}(s)$和$\mathbf{x}(s+\Delta s)$的单位副法线向量，这两向量的夹角为$\Delta\varphi$，这时

$$|\mathbf{b}(s+\Delta s)-\mathbf{b}(s)|=2\sin\frac{|\Delta\varphi|}{2}. \tag{2.15}$$

因此，

$$\frac{|\mathbf{b}(s+\Delta s)-\mathbf{b}(s)|}{|\Delta s|}=\frac{2\sin\frac{|\Delta\varphi|}{2}}{|\Delta s|}$$

$$=\frac{\sin\frac{|\Delta\varphi|}{2}}{\left|\frac{\Delta\varphi}{2}\right|}\cdot\frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|}\to|\tau|(\mathbf{x}_1\to\mathbf{x}),$$

即

$$|\tau|=\left|\frac{d\mathbf{b}}{ds}\right|=|\mathbf{b}'|. \tag{2.16}$$

因为 $\mathbf{b}^2=1$，所以 $\mathbf{b}\mathbf{b}'=0$，这表示 $\mathbf{b}'\perp\mathbf{b}$。此外，由于

$$\mathbf{b}'=(\mathbf{t}\times\mathbf{n})'=\mathbf{t}'\times\mathbf{n}+\mathbf{t}\times\mathbf{n}'=\mathbf{t}\times\mathbf{n}'$$

(因为 $\mathbf{t}'\parallel\mathbf{n}$，所以 $\mathbf{t}'\times\mathbf{n}=0$)，

于是 $\mathbf{b}'\cdot\mathbf{t}=0$，这表明 $\mathbf{b}'\perp\mathbf{t}$，因此 $\mathbf{b}'\parallel\mathbf{n}$，所以 (2.16) 可写为

$$|\tau|=|\mathbf{b}'\cdot\mathbf{n}|.$$

再以 $\mathbf{n}=\frac{1}{k}\mathbf{x}''$，$\mathbf{b}=\frac{\mathbf{x}'\times\mathbf{x}''}{k}$代入，就得到 (2.7)：

$$|\tau|=\frac{|\mathbf{x}'\mathbf{x}''\mathbf{x}'''|}{k^2}.$$

证毕。

最后，让读者证明：如果曲线 C 以任意参数 t 给定时，则

$$k=\frac{|\dot{x}\times\ddot{x}|}{|\dot{x}|^3}, \tag{2.17}$$

或即

$$k^2=\frac{(\dot{x}_2\ddot{x}_3-\dot{x}_3\ddot{x}_2)^2+(\dot{x}_3\ddot{x}_1-\dot{x}_1\ddot{x}_3)^2+(\dot{x}_1\ddot{x}_2-x_2\ddot{x}_1)^2}{(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)^3} \tag{2.18}$$

$$\tau=\frac{(\dot{x}\ddot{x}\dddot{x})}{(\dot{x}\times\ddot{x})^2}, \tag{2.19}$$

或即

$$\tau=\frac{\begin{vmatrix}\dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3\\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3\\ \dddot{x}_1 & \dddot{x}_2 & \dddot{x}_3\end{vmatrix}}{(\dot{x}_2\ddot{x}_3-\dot{x}_3\ddot{x}_2)^2+(\dot{x}_3\ddot{x}_1-\dot{x}_1\ddot{x}_3)^2+(\dot{x}_1\ddot{x}_2-\dot{x}_2\ddot{x}_1)^2}. \tag{2.20}$$

4. 标准展开式．曲线在每个正常点邻近的结构 在点 $\mathbf{x}_0$ 的邻近，可以假设在 $\mathbf{x}_0$ 的曲线坐标为 $s=0$．我们假定曲线 C 有足够阶的连续导数，因而有

$$\mathbf{x}(s)=\mathbf{x}_0+s\mathbf{x}_0'+\frac{s^2}{2}\mathbf{x}_0''+\frac{s^3}{6}\mathbf{x}_0'''+\cdots,$$

式中指标 0 表示导数在 $\mathbf{x}_0$ 的值．但是在 $\mathbf{x}_0$ 有 $\mathbf{x}_0=0$，$\mathbf{x}_0'=\mathbf{t}_0$，$\mathbf{x}_0''=k_0\mathbf{n}_0$，$\mathbf{x}_0'''=k_0'\mathbf{n}_0-k^2\mathbf{t}_0+k_0\tau_0\mathbf{b}$，代入上面的展开式，有

$$\mathbf{x}(s)=\left(s-\frac{k_0^2s^3}{6}+\cdots\right)\mathbf{t}+\left(\frac{k_0s^2}{2}+\frac{k_0's^3}{6}+\cdots\right)\mathbf{n}$$
$$+\left(\frac{k_0\tau_0s^3}{6}+\cdots\right)\mathbf{b}.$$

从此，若取 $\mathbf{x}_0$ 的活动标架作为在 $\mathbf{x}_0(x_1,x_2,x_3)$ 的坐标系，就得到曲线的标准展开式：

$$\left.\begin{aligned}x_1&=s-\frac{k_0^2}{6}s^3+\cdots,\\ x_2&=\frac{k_0}{2}s^2+\frac{k_0'}{6}s^3+\cdots,\\ x_3&=\frac{k_0\tau_0}{6}s^3+\cdots,\end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

式中没有写出的项关于 s 至少是四次的．

现在利用这个展开式来考察曲线在点 x_0 邻近在伴随三面形的三个平面上的射影曲线．在密切平面上的射影是：

$$x_3=0,\quad x_1=s,\quad x_2=\frac{1}{2}k_0s^2.$$

它是抛物线（图 2.13(a)）

$$x_3=0\ ,\quad x_2=\frac{1}{2}k_0x_1^2.$$

它在 x_0 切于轴 x_0x_1 并凹向向量 n 的一侧。

在法平面上的射影是

$$x_1=0\ ,\quad x_2=\frac{1}{2}k_0s^2,\quad x_3=\frac{1}{6}k_0\tau_0s^3,$$

它是一条半立方抛物线（图 2.15(b)）。

$$x_1=0\ ,\quad x_3^2=\frac{2}{9}\ \frac{\tau_0^2}{k_0}x_2^3.$$

这条曲线以 x_0 为第一类尖点，并且有半切线 x_0x_2（即主法线），与 n 同向（图2.13(b)）。

最后，在从切面上的射影是

$$x_2=0\ ,\quad x_1=s\ ,\quad x_3=\frac{1}{6}k_0\tau_0s^3,$$

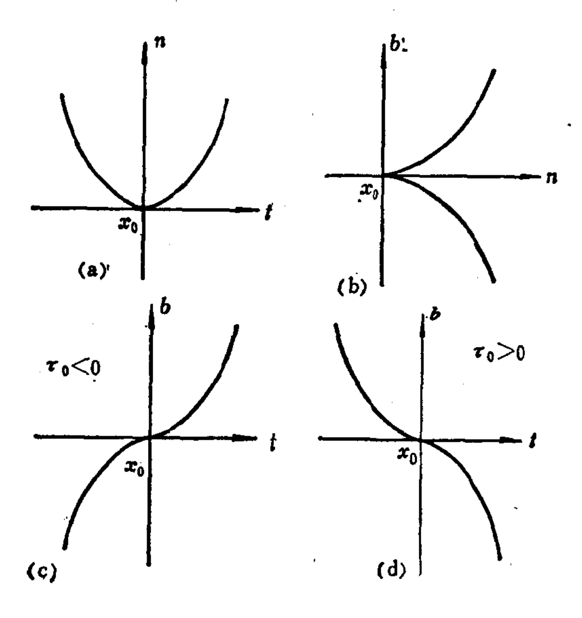


图 2.13

它是一条以 x_0 为变曲点的三次抛物线(图 2.13(c),(d))。这条曲线与挠率的符号有关。当 $\tau_0>0$ 时，曲线由下向上穿过密切平面，当 $\tau_0>0$ 时，曲线由上向下穿过密切平面；从而也给出挠率符号的解释。

5. 曲率球面．密切球面 通过曲线 $\mathbf{x}(s)$ 上点 $\mathbf{x}(s_0)$ 和它的三邻点所决定的一个球面，它与曲线 $\mathbf{x}(s)$ 在点 $\mathbf{x}(s_0)$ 组成阶 $\geqslant 3$ 的接触，称这个球面为曲线 $\mathbf{x}(s)$ 在点 $\mathbf{x}(s_0)$ 的曲率球面又名为密切球面。若 $\mathbf{C}$ 是球面的中心，r 为球面的半径，则这个球面的方程为

$$(\xi-\mathbf{C})^2-r^2=0,$$

使得这个球面与曲线 $\mathbf{x}(s)$ 在 $s=s_0$ 处组成阶 $\geqslant 3$ 的接触，则函数

$$f(s)=(\mathbf{x}(s)-\mathbf{C})^2$$

在 $s=s_0$ 必须等于 r^2，并且在点 s_0 必须至少有三阶导数等于零。应用 Frenet 方程，我们得到

$$f'(s)=2(\mathbf{x}-\mathbf{C})\mathbf{t},$$

$$f''(s)=2k(\mathbf{x}-\mathbf{C})\mathbf{n}+2,$$

$$f'''(s)=2(k-\mathbf{C})(-k^2\mathbf{t}+k'\mathbf{n}+k\tau\mathbf{b}).$$

组成二阶接触的条件是 $f(s_0)=r^2$，$f'(s_0)=f''(s_0)=0$。如果令

$$\mathbf{x}-\mathbf{C}=\alpha\mathbf{t}+\beta\mathbf{n}+\gamma\mathbf{b},$$

从这些条件，有 $\alpha=(\mathbf{x}-\mathbf{C})\mathbf{t}=0$，$\beta=(\mathbf{x}-\mathbf{C})\mathbf{n}=-\frac{1}{k}$。因此如果 $k>0$，则有

$$\mathbf{C}=\mathbf{x}(s_0)+\frac{1}{k}\mathbf{n}-\gamma\mathbf{b}, \tag{2.22}$$

式中 γ 是任意的。因此，在点 $\mathbf{x}(s_0)+\frac{1}{k}\mathbf{n}$ 垂直于密切平面的直

线是与曲线在点 $\mathbf{x}(s_0)$ 至少组成二阶接触的所有球面中心的轨迹。这条直线叫做曲线在点 $\mathbf{x}(s_0)$ 的极轴。又名曲率轴。上述一切球面都包含在密切平面上以 $\mathbf{x}(s_0)+\frac{1}{k}\mathbf{n}$ 为中心，$\frac{1}{k}$ 为半径的圆，并且与曲线至少组成二阶接触。这个圆就是曲线在 $\mathbf{x}(s_0)$ 的曲率圆，它的中心是曲线在 $\mathbf{x}(s_0)$ 的曲率中心。

其次，如果至少组成三阶接触，就需要把条件 $f'''(s_0)=0$ 加到前面的条件，由此与（2.22）推出

$$\mathbf{C}(s_0)=\mathbf{x}(s_0)+\frac{1}{k}\mathbf{n}-\frac{k'}{k^2\tau}\mathbf{b}. \tag{2.23}$$

对曲线的任意一点 $\mathbf{x}(s)$，我们有

$$\mathbf{C}(s)=\mathbf{x}(s)+\frac{1}{k}\mathbf{n}(s)-\frac{k'}{k^2\tau}\mathbf{b}(s). \qquad (2.23)'$$

从此不难求出曲率球面的半径

$$r^2(s)=k^{-2}+h'^2k^{-4}\tau^{-2}.$$

例 1　求一条空间曲线在球面上的条件.

若一条曲线在球面上，则球面必为这种曲线的密切球面；所以球面中心为固定点，从而 $\mathbf{C}'(s)=0$。然后利用（2.23）′经过简单的计算得到所求的条件为

$$\frac{\tau}{k}=\left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)',$$

反之也成立。

例 2　在空间曲线 $\mathbf{x}(s)$ 的切线上取一点 $\mathbf{y}$，则可写成

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}(s)+u\mathbf{t} \tag{2.24}$$

若 u 是 s 的函数，则 $\mathbf{y}$ 的轨迹 $\mathbf{y}(s)$ 是另一空间曲线。当 $\mathbf{y}(s)$ 的切线与通过其切点的 $\mathbf{x}(s)$ 的切线常垂直时，则称 $\mathbf{y}(s)$ 为 $\mathbf{x}(s)$ 的渐开线，而称 $\mathbf{x}(s)$ 为 $\mathbf{y}(s)$ 的渐屈线。

由于$\frac{d\mathbf{y}}{ds}$为渐开线的切向量，所以

$$\mathbf{t}\frac{d\mathbf{y}}{ds}=0,$$

即

$$\mathbf{t}\left(\mathbf{t}+uk\mathbf{n}+\mathbf{t}\frac{du}{ds}\right)=0,$$

或

$$1+\frac{du}{ds}=0,$$

积分后得到

$$u=C-s \qquad (C\text{：积分常数}),$$

从此得到渐伸线的方程：

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}+(C-s)\mathbf{t}. \tag{2.25}$$

对C的每个值有一条对应的渐伸线。我们取$C=C_1$，C_2，则所确定的两条渐伸线所对应的

$$u_1=C_1-s,\ u_2=C_2-s,$$

由于$u_2-u_1=C_2-C_1$，这表明沿曲线$\mathbf{x}(s)$的切线上在两条渐开线之间的距离保持不变。

6. m维空间E^m中的曲线 E^m中的曲线论类似于E^3中的曲线论。一个欧氏运动

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{x}A+\mathbf{b},\quad A\in O_m,$$

依赖于$m+\frac{m(m-1)}{2}$个参数，可微性的阶是$\geqslant\frac{m+1}{2}+1$。不变参数是弧长$s=\int_{t_0}^{t}|\dot{\mathbf{x}}(t)|dt$；$\mathbf{x}'(s)$是一个单位向量。

固定笛氏坐标系是借m个标准正交向量$\mathbf{e}_i$（$i=1,\cdots,m$）给定的。对曲线上的动点附着标准正交向量$\mathbf{a}_1(s)=\mathbf{x}(s)$，$\mathbf{a}_2(s),\cdots,\mathbf{a}_m(s)$的一个标架。设标架矩阵为$A(s)$，则

$$\{\mathbf{a}_1(s),\cdots,\mathbf{a}_m(s)\}=A(s)\{\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_m\}$$

是正交的；$C(A)=(P_{ij}(s))$是反称的。若$P_{1j}(s)=0$，$j=1,\cdots,m$，则$\mathbf{x}(s)=\mathbf{a}s+\mathbf{b}$是一直线。这时，$A(s)$可以取作常数。若有一个$P_{1j}\neq 0$，比方说$P_{12}\neq 0$，可以取$\mathbf{a}_2=\dfrac{\mathbf{a}_1'(s)}{|\mathbf{a}_1'(s)|}$，则

$$C(A)=\begin{pmatrix} 0 & P_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ -P_{12} & 0 & P_{23} & \cdots & P_{2m} \\ 0 & -P_{23} & & & \\ \vdots & \vdots & & P_{ij} & \\ 0 & -P_{2m} & & & \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

若对一切s，$P_{2j}(s)=0$，$j>2$，则曲线的切线保持在$\mathbf{a}_1(s)$，$\mathbf{a}_2(s)$的平面上；于是$\mathbf{x}(s)$是一平面曲线。如果某一$P_{2j}\neq 0$，$j>2$，我们取$\mathbf{a}_3$沿着方向$\mathbf{a}_2'(s)+P_{12}(s)\mathbf{a}_1(s)$的单位向量。关于这个新的系，

$$C(A)=\begin{pmatrix} 0 & P_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -P_{12} & 0 & P_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -P_{23} & 0 & & & \\ 0 & 0 & & P_{ij} & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix},$$

按照这个方法进行，或者得到一个证明使$\mathbf{x}(s)$完全落在某E^n（$n<m$）中，或者求出一个活动标架$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m\}$，使它的 Cartan 矩阵取如下的形式：

$$
\begin{pmatrix}
0 & k_1(s) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-k_1(s) & 0 & k_2(s) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -k_2(s) & 0 & k_3(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -k_{m-2}(s) & 0 & k_{m-1}(s) \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -k_{m-1}(s) & 0
\end{pmatrix}
\tag{2.27}
$$

$k_j(s)$ 叫做 $\mathbf{x}(s)$的第 j 曲率。由作图，曲率都是不变量，并且除了一个欧氏运动外，刻划 $\mathbf{x}(s)$。由行向量 $\mathbf{x}'(s)$，…，$\mathbf{x}^{(m)}(s)$ 构成的行列式容易看出是

$$\|\mathbf{x}', \cdots, \mathbf{x}^{(m)}\| = k_1^{m-1} k_2^{m-2} \cdots k_{m-2}^2 k_{m-1}.$$

这表示，k_{m-1} 是一个 m 阶不变量，可微性的阶是 C^m。

§2.3. 曲面的欧氏微分几何

本节考虑欧氏空间 E^3 中曲面的局部几何。这个理论依赖于两个二阶不变式。虽然，首先假定曲面是 C^3 的，因为在讨论中通过曲面上所画出的曲线来研究曲面，并且在空间曲线的欧氏几何中可微性的自然假设是 C^3 的。

1. 曲面的参数表示 在微分几何中，采用以参数给定曲面的表示法来研究曲面，它是平面上的直角坐标的自然推广。设 x^1，x^2，x^3 表示空间中点的直角坐标，用在 u^1，u^2 平面的区域 D 里所定义的三个函数 $x^i(u^1, u^2)$ 来表达曲面：

$$x^i = x^i(u^1, u^2),\ (u^1, u^2) \in D, \tag{3.1}$$

并假定 $x^i(u^1,\ u^2)$ 是 C^3 函数。这里还假定矩阵

$$M = \begin{pmatrix} x^1_{u^1} & x^2_{u^1} & x^3_{u^1} \\ x^1_{u^2} & x^2_{u^2} & x^3_{u^2} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

在 u^1u^2 平面上某一点 $Q_0(u^0,\ v^0)$ 的秩等于 2。用满足这些条件的 C^3 函数所定义的曲面（3.1）称为C^3**曲面**；这样的曲面的解析表示法，称为 Gauss **的参数表示**。

由方程（3.1）关于曲面上点$P(x, y, z)$的向径，有向量方程

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2), \tag{3.3}$$

或即

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 x^1(u^1, u^2) + \mathbf{e}_2 x^2(u^1, u^2) + \mathbf{e}_3 x^3(u^1, u^2). \tag{3.3$'$}$$

这时（3.2）的矩阵M的秩等于 2 的条件可改写为：

$$\mathbf{r}_{u^1} \times \mathbf{r}_{u^2} \neq 0. \tag{3.4}$$

如果没有相反的声明，今后只限于讨论满足条件（3.4）的点。

2. 曲面的切面与法线．活动标架．基本形式与曲率 固定其中一个坐标（例如 $u^2 = u^2_0$）的值，而让另一个坐标（例如 u^1）变动，则点 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1,\ u^2_0)$ 的轨迹是曲面上的一条曲线，称这种曲线为 u^1**曲线**．同样地，u^2 **曲线**是具有常数坐标 $u^1 = u^1_0$ 的曲线；u^1 曲线（或参数曲线 u^2＝常数）与 u^2 曲线（或参数曲线 u^1＝常数）在曲面上构成**坐标网**．例如平面上笛氏坐标网 x^1＝常数与 x^2＝常数是由两束平行直线构成的．又如极坐标网 ρ＝常数与 θ＝常数是由一个直线束与以直线束的中心为圆心的一族同心圆构成的。再如球面上的子午线 φ＝常数与平行圆 θ＝常数也构成一个坐标网。这三个例子的参数方程分别可写为下列形式：

1° 平面的参数方程：$\mathbf{r} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2$（关于直角坐标）。

2° 平面的参数方程：$\mathbf{r}=\rho\cos\theta\mathbf{e}_1+\rho\sin\theta\mathbf{e}_2$（关于极坐标）。

3° 球面的参数方程：

$$\mathbf{r}=a\cos\varphi\cos\theta\mathbf{e}_1+a\sin\varphi\cos\theta\mathbf{e}_2+a\sin\theta\mathbf{e}_3$$

式中 a 为球面的半径（关于球面坐标）。

如所知，曲面的切面的方程是

$$(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r},\mathbf{r}_{u^1},\mathbf{r}_{u^2})=0, \tag{3.5}$$

式中 $\boldsymbol{\rho}(x^1,x^2,x^3)$ 表示切面上任意点 M 的向径。

选取曲面法线的方向使与 $\mathbf{r}_{u^1}$，$\mathbf{r}_{u^2}$ 做成右手系，并设这个方向的单位向量是 $\mathbf{N}$，就有

$$\mathbf{N}=\frac{\mathbf{r}_{u^1}\times\mathbf{r}_{u^2}}{|\mathbf{r}_{u^1}\times\mathbf{r}_{u^2}|}, \tag{3.6}$$

称 $\mathbf{N}$ 为曲面的**法向量**。因而切面的方程（3.5）也可写为

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r})=0. \tag{3.5'}$$

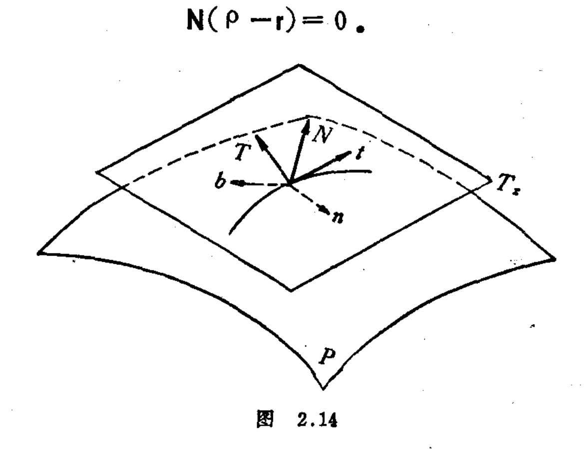


图 2.14

曲面法线的方程可写为

$$\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}+\lambda(\mathbf{r}_{u^1}\times\mathbf{r}_{u^2}), \tag{3.7}$$

式中 $\boldsymbol{\rho}(x^1,x^2,x^3)$ 是法线上任意一点，λ 是决定点 $\boldsymbol{\rho}$ 在法线上位置的参数。

现在令

$$E=\mathbf{r}_{u^1}^2,\quad F=\mathbf{r}_{u^1}\mathbf{r}_{u^2},\quad G=\mathbf{r}_{u^2}^2, \tag{3.8}$$

则N可改写为

$$N=\frac{\mathbf{r}_{u^1}\times\mathbf{r}_{u^2}}{\sqrt{EG-F^2}}, \tag{3.9}$$

当然

$$EG-F^2=(\mathbf{r}_{u^1}\times\mathbf{r}_{u^2})^2>0. \tag{3.10}$$

曲面曲线 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1(t),\ u^2(t))$ 的弧长决定于

$$l=\int_a^b\sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{E(\dot{u}^1)^2+2F\dot{u}^1\dot{u}^2+G(\dot{u}^2)^2}\,dt,$$

因此，曲线的弧长是

$$s=\int_a^t\sqrt{E(\dot{u}^1)^2+2F\dot{u}^1\dot{u}^2+G(u^2)^2}\,dt, \tag{3.11}$$

从此得到

$$ds^2=Ed(u^1)^2+2Fdu^1du^2+G(du^2)^2. \tag{3.12}$$

称 ds 为曲面的线素. 以后用 I 来表示:

$$I=E(du^1)^2+2Fdu^1du^2+G(du^2)^2, \tag{3.13}$$

又称 I 为曲面的第一基本形式，它在曲面论中具有极重要的地位; E, F, G 称为第一基本量. 由于 (3.12) 可知 I 为一正定二次型.

为了以后的需要，对于微分向量的外乘，引入如下的特殊记号. 例如，若有微分向量 $d\mathbf{r}_k=\omega_k^i e_i$，式中 ω_k^i 为 1-形式，则写

$$d\mathbf{r}_1\times d\mathbf{r}_2=\omega_1^i\otimes\omega_2^j e_i\times e_j,$$

但

$$d\mathbf{r}_1\text{“}\times\text{”}d\mathbf{r}_2=\omega_1^i\wedge\omega_2^j e_i\times e_j,$$

同样地对于行列式 “$|d\mathbf{r}_1,\cdots,d\mathbf{r}_n|$” = “$|\omega_j^i|$” $|e_1,\cdots,e_n|$，式中

$$``|\omega^{k}_{i}|" = \delta^{k_1 \cdots k_n}_{1 \cdots n} \omega^{k_1}_{1} \wedge \cdots \wedge \omega^{k_n}_{n}.$$

这样，由下式所定义 2-形式 α 叫做曲面的面积元素：

$$d\mathbf{r} `` \times " d\mathbf{r} = 2\alpha N, \quad N \cdot N = 1, \tag{3.14}$$

因为 $d\mathbf{r} `` \times " d\mathbf{r} = (\mathbf{r}_{u^1} du^1 + \mathbf{r}_{u^2} du^2) `` \times " (\mathbf{r}_{u^1} du^1 + \mathbf{r}_{u^2} du^2)$

$$= 2\mathbf{r}_{u^1} \times \mathbf{r}_{u^2} du^1 \wedge du^2,$$

利用 (3.9) 和 (3.10)，便得

$$d\mathbf{r} `` \times " d\mathbf{r} = 2(\sqrt{EG - F^2}\, du^1 \wedge du^2) N,$$

与 (3.14) 比较，得到

$$\alpha = \sqrt{EG - F^2}\, du^1 \wedge du^2, \tag{3.14$'$}$$

$\iint \alpha$ 给出曲面面积的值。

现在我们在曲面 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ 上取一条通过 P 点而借助于方程 $u^1 = u^1(s)$，$u^2 = u^2(s)$ 给定的一条空间曲线 $\mathbf{x}$。我们可以限制点 $\mathbf{r}_0(u_0^1, u_0^2)$ 的一个邻域，使对应的曲面块是一个微分流形。沿空间曲线 $\mathbf{x}$ 我们有 Frenet 标架 $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$，它的 Cartan 矩阵是 (2.9)：

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}.$$

标架的向量除 $\mathbf{t}$ 属于切面 T_x 外，其他两个向量与曲面没有联系。这对曲面性质的研究是不方便的。把 $\mathbf{b}$ 绕 $\mathbf{t}$ 旋转一个角度 $\alpha = (\mathbf{b}, \mathbf{N})$ 变到 $\mathbf{N}$，并把 $\mathbf{n}$ 变到垂直于曲线的一个向量 $\mathbf{T}$($\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{t} = 0$)，因而在切面上 ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$)。$\mathbf{T}$ 是在切面上曲线 $\mathbf{x}(s)$ 的法线。我们称三面形 $\{\mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ 为曲面曲线 $\mathbf{x}(s)$ 的切法标架。上述的旋转用下面的记号（图 2.14）来表达：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

现在我们利用方程(1.6.7)：$C(AB) = C(A) + AC(B)A^{-1}$ 来寻求 Cartan 矩阵的一个变更：令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\},$$

则

$$C(AB) = A' A^{-1} + AC_1 A^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha \dfrac{d\alpha}{ds} & \cos\alpha \dfrac{d\alpha}{ds} \\ 0 & -\cos\alpha \dfrac{d\alpha}{ds} & -\sin\alpha \dfrac{d\alpha}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{d\alpha}{ds} \\ 0 & -\dfrac{d\alpha}{ds} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ -k\cos\alpha & 0 & \tau \\ k\sin\alpha & -\tau & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ -k\cos\alpha & 0 & \tau + \dfrac{d\alpha}{ds} \\ k\sin\alpha & -\tau - \dfrac{d\alpha}{ds} & 0 \end{pmatrix}.$$

另一方面，

$$C(AB)=\left[\frac{d}{ds}\{\mathbf{t},\mathbf{T},\mathbf{N}\}\right][\{\mathbf{t},\mathbf{T},\mathbf{N}\}^{-1}],$$

由此两式便得对应的 Frenet 方程：

$$d\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{T}\\ \mathbf{N}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k\cos\alpha ds & -k\sin\alpha ds\\ -k\cos\alpha ds & 0 & \tau ds+d\alpha\\ k\sin\alpha ds & -\tau ds-d\alpha & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{T}\\ \mathbf{N}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & k_g ds & k_n ds\\ -k_g ds & 0 & \tau_r ds\\ -k_n ds & -\tau_r ds & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{T}\\ \mathbf{N}\end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

式中 $k_g=k\cos\alpha$ 叫做曲面曲线的测地曲率，$k_n=-k\sin\alpha$ 叫做法曲率，$\tau_r=\tau+\alpha'$ 叫做相对挠率（或测地挠率，通常记作 τ_g）。设 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 是在曲面的点 $\mathbf{r}$ 的切面内而且为通过 x 的互相垂直的两个单位向量，和 $\mathbf{e}_3=N$ 所形成的标架 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 可以把标架 $\{\mathbf{t},\mathbf{T},\mathbf{N}\}$ 绕 $\mathbf{N}$ 旋转一个角 $\theta=\theta(s)$ 而得到：

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{T}\\ \mathbf{N}\end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

当它绕 $\mathbf{e}_3$ 旋转时，仍保持同一性质，所以它依赖于旋转角 θ 和参数 u^1，u^2 等三个参数。我们称在曲面上各点这样地由 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ 张成切面的活动标架为一阶标架。若点 $\mathbf{r}$ 在曲面曲线 $\mathbf{x}(s)$ 上移动，则 $\theta=\theta(s)$，而且沿空间曲线 $\mathbf{x}$ 的新标架 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 的 Frenet 方程可写为如下的形式：

$$d\{\mathbf{e}_i\}=(\omega_i^j)\{\mathbf{e}_j\} \quad (\omega_i^j=-\omega_j^i). \tag{3.17}$$

现在要寻求系数 ω_i^j 的表达式，由于反称性，只要求出 ω_1^2，ω_1^3，ω_2^3 就够了，把（3.16）微分并应用（3.15）和（3.16），便有

$$d\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & k_g ds & k_n ds\\ -k_g ds & 0 & \tau_r ds\\ -k_n d_s & -\tau_r ds & 0\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sin\theta d\theta & \cos\theta d\theta & 0\\ -\cos\theta d\theta & -\sin\theta d\theta & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & k_g ds+d\theta & (k_n\cos\theta+\tau_r\sin\theta)ds\\ -(k_g ds+d\theta) & 0 & (-k_n\sin\theta+\tau_r\cos\theta)ds\\ -(k_n\cos\theta+\tau_r\sin\theta)ds & -(-k_n\sin\theta+\tau_r\cos\theta)ds & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix}.$$

由此立刻可以看出

$$\begin{aligned}\omega_1^2&=k_g ds+d\theta,\\ \omega_1^3&=(k_n\cos\theta+\tau_r\sin\theta)ds,\\ \omega_2^3&=(-k_n\sin\theta+\tau_r\cos\theta)ds.\end{aligned}\tag{3.18}$$

曲线 $\mathbf{x}(s)$ 的切线决定于

$$\mathfrak{t}ds=d\mathfrak{r}=\omega^1\mathbf{e}_1+\omega^2\mathbf{e}_2,\tag{3.19}$$

式中已令

$$\omega^1=\cos\theta ds,\quad \omega^2=-\sin\theta ds.\tag{3.20}$$

由定义，

$$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2.\tag{3.20$'$}$$

定理2.11 对曲面上任一具 $e_3=N$ 的可微标架有线性微分形式 ω^1，ω^2 存在，它们把第一基本形式对角化：

$$ds^2=(du^1, du^2)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix}=(\omega^1, \omega^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix},$$

并且微分形式 $d\mathbf{r}$ 的向量值是

$$d\mathbf{r}=\omega^1\mathbf{e}_1+\omega^2\mathbf{e}_2.$$

五个线性微分形式

$$\omega^1, \omega^2, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3$$

不是互相独立的。它们必须满足几个Poincaré关系式。$d(d\mathbf{r})=0$，$d(d\mathbf{e}_i)=0$。例如从（3.19），（3.17），

$$\begin{aligned} d(d\mathbf{r}) &= d\omega^1\mathbf{e}_1-\omega^1\wedge d\mathbf{e}_1+d\omega^2\mathbf{e}_2-\omega^2\wedge d\mathbf{e}_2 \\ &= (d\omega^1-\omega^2\wedge\omega_2^1)\mathbf{e}_1+(d\omega^2-\omega^1\wedge\omega_1^2)\mathbf{e}_2 \\ &\quad -(\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3)\mathbf{e}_3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

从此，因为 $\omega_i^j=-\omega_j^i$，我们有

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= -\omega^2\wedge\omega_1^2, \\ d\omega^2 &= \omega^1\wedge\omega_1^2, \\ 0 &= \omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3. \end{aligned} \tag{3.21}$$

再从Poincaré关系式 $d(d\mathbf{e}_i)=0$。利用（3.17），

$$d(d\mathbf{e}_i)=d\omega_i^j\mathbf{e}_j-\omega_i^j\wedge d\mathbf{e}_j=(d\omega_i^j-\omega_i^k\wedge\omega_k^j)\mathbf{e}_j=0,$$

即

$$\begin{aligned} d\omega_1^2 &= \omega_1^3\wedge\omega_3^2=-\omega_1^3\wedge\omega_2^3, \\ d\omega_1^3 &= \omega_1^2\wedge\omega_2^3, \\ d\omega_2^3 &= \omega_2^1\wedge\omega_1^3=-\omega_1^2\wedge\omega_1^3. \end{aligned} \tag{3.22}$$

前两式称为曲面论的Gauss-Codazzi（高斯-柯达奇）方程。$(3.21)_{1,2}$和$(3.22)_{1,2}$合并起来称为结构方程。(3.17)，(3.19)与结构方程组成曲面论的基本方程。$d(d\omega^i)=0$和$d(d\omega_i^j)=0$是它们的推论。

从(3.21)和Cartan引理（定理1.5）可写出

$$(\omega_1^3, \omega_2^3)=(\omega^1, \omega^2)\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

现在要寻求可微标架使矩阵(l_{ij})变成对角型。为此，我们下面要证明对称二次微分形式

$$\begin{aligned} \text{II} &= -d\mathbf{N}\cdot d\mathbf{r}=-d\mathbf{e}_3 d\mathbf{r}=\omega_1^3\omega^1+\omega_2^3\omega^2 \\ &= (\omega^1, \omega^2)\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.24}$$

是可以化为对角型的，II称为曲面$\mathbf{r}$的第二基本形式。这个二次型在曲面论里也是很重要的，但不一定是正定二次型，l_{11}，l_{12}，l_{22}称为第二基本量。

在这里先来指出 $k_n=\dfrac{\text{II}}{\text{I}}$.

事实上，若考察一条曲面曲线$C: \mathbf{r}(s)$，则由$\mathbf{r}''=\mathbf{k}_n$和$\mathbf{e}_3 d\mathbf{r}=0$并考察图2.12，容易看出，

$$\begin{aligned} \frac{\text{II}}{\text{I}} &= -\frac{d\mathbf{e}_3 d\mathbf{r}}{ds^2}=-\frac{\mathbf{e}_3 d^2\mathbf{r}}{ds^2}=-\mathbf{e}_3\mathbf{k}_n=-k\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \\ &= -k\sin\alpha=k_n. \end{aligned}$$

在曲面论中所遇到的最初不变量不是函数，而是两个二次基本形式，在实曲线论中所给的不变量也是两个二次微分形式，即ds^2，k^2ds^2。

曲面论的主要问题是寻求不变参数和不变标架，它们都可以从方程(3.17)，(3.20)′，(3.22)同时求得。

现在要寻求可微标架使矩阵 (l_{ij}) 变为对角型，也就是要证明 II 是可以化为对角型的：为此，写出

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \\ \mathbf{e}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}.$$

从方程 (3.23) 得到新形式 $\omega^{i'}$：

$$d\mathbf{r} = \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 = \omega^{1'} \mathbf{e}_1' + \omega^{2'} \mathbf{e}_2',$$

这样

$$(\omega^{1'}, \omega^{2'}) = (\omega^1, \omega^2) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

此外，由 (3.18) 和 (3.20)，我们有

$$\omega_1^3 = k_n \omega^1 - \tau_r \omega^2, \quad \omega_2^3 = \tau_r \omega^1 + k_n \omega^2, \tag{3.26}$$

又有 (3.26) 的类似表达式

$$\omega_{1'}^{3'} = k_n \omega^{1'} - \tau_r \omega^{2'},$$

把 (3.25) 代入，则有

$$\begin{aligned} \omega_{1'}^{3'} &= k_n(\omega^1 \cos\varphi + \omega^2 \sin\varphi) - \tau_r(-\omega^1 \sin\varphi + \omega^2 \cos\varphi) \\ &= (k_n \omega^1 - \tau_r \omega^2)\cos\varphi + (\tau_r \omega^1 + k_n \omega^2)\sin\varphi \\ &= \omega_1^3 \cos\varphi + \omega_2^3 \sin\varphi, \end{aligned}$$

再把 (3.23) 代入，并利用 (3.25)，化简后，就有

$$\begin{aligned} \omega_{1'}^{3'} = &[l_{11}\cos^2\varphi + l_{22}\sin^2\varphi + 2l_{12}\cos\varphi\sin\varphi]\omega^{1'} \\ &+ [(l_{22} - l_{11})\cos\varphi\sin\varphi + l_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]\omega^{2'}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

同样

$$\omega_2^{3'}{}' = -\omega_1^3 \sin\varphi + \omega_2^3 \cos\varphi$$
$$= [(l_{22}-l_{11})\cos\varphi\sin\varphi + l_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]\omega^{1'}$$
$$+ [l_{11}\sin^2\varphi + l_{22}\cos^2\varphi - 2l_{12}\cos\varphi\sin\varphi]\omega^{2'}. \qquad (3.27)_2$$

第二基本形式是对角型的，如果

$$\tan 2\varphi = \frac{2l_{12}}{l_{11}-l_{22}},$$

2φ 除 π 的倍数外是确定的，除非 $l_{12}=0$，$l_{11}=l_{22}$。在一般情形下，φ 除了 $\frac{\pi}{2}$ 的倍数外是确定的，这表明，标架 $\{e_{i'}\}$ 除了 $e_1 \to e_2$，$e_2 \to -e_1$ 或者 $e_i \to -e_i$（$i=1, 2$）外是确定的。

定义 在 T_x 上一直线使第二基本形式变为对角型，则称这一直线为曲面在一点 x 的一个*主方向*。若一曲线的一切切线都是主方向，则称它为一*曲率线*。一曲率线的法曲率称为曲面的*主曲率*。若在一点的两主曲率相同，称该点为*脐点*。

设在一曲面上有一曲线 C_1，并设曲面已给了定向，即选定了法向量 e_3。又设曲线 C_1 有一定向，即选定了曲线的切向量 e_1，这样标架就确定了 $e_2 = e_3 \times e_1$。对于曲线 C_1 有 $\omega^2 = 0$（因 $dr = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$）。同样，若选定另一曲线 C_2 的切向量 e_2 则 $\omega^1 = 0$。

定理2.12 若 r_0 不是脐点，则在 Tr_0 上恰有两个互相垂直的主方向。在一脐点处的切面上每个方向都是主方向。

定理中最后结论尚待证明，但首先对我们已经求得的不变标架导入一些特殊记号。$\{a_i\}$ 表示一个标准正交标架使 a_1，a_2 是沿主方向上的单位向量。$a_3 = N$ 是正交于曲面。这样的标架叫做 Darboux *标架*。有时称为 Frenet *标架*；因为同曲线论的 Frenet 标架相仿，这是同曲面最密切关联着的标架。这时由于沿主方向 a_1 和 a_2 分别有 $\omega^2 = 0$ 和 $\omega^1 = 0$。附属这个标架的 Pfaff 形式分别记作 π^i 和 π_i^j，则由（3.26）可知主曲率 k_1，k_2 决定于

$$\pi_i^3 = k_i \pi^i,\quad i = 1, 2, \text{不是求和。}$$

Darboux 标架的 Frenet 方程是

$$d\mathbf{r} = \pi^1 \mathbf{a}_1 + \pi^2 \mathbf{a}_2,$$

$$d\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pi_1^2 & k_1\pi^1 \\ -\pi_1^2 & 0 & k_2\pi^2 \\ -k_1\pi^1 & -k_2\pi^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}, \qquad (3.28)$$

这些公式在脐点处也成立；因为由方程（3.27），总有可能找到一个标架使 $l_{12} = 0$。若 $k_1 = k_2$，公式（3.27）表明对脐点处的一切标架的 Gartan 矩阵是相同的。这样定理证毕。如果一个曲面有一脐点，在整个局部曲面上，就不能以唯一的和可微的方法来定义 Darboux 标架。

我们选取这样的标架向量，使 $\mathbf{a}_1$ 切于一条已知曲率线 $\mathbf{x}(s)$，这时，Darboux 标架变成曲率线的标架；与（3.15）比较，下面的定理成立：

Rodrigues 定理 一条曲面曲线是曲率线的一个充要条件是 $\tau_r = 0$ 或 $d\mathbf{N} + k_1 \mathbf{t} ds = 0$。第二个条件可写成较一般的形式：若对曲面 $\mathbf{r}$ 上某曲线，

$$d\mathbf{N} + \lambda \mathbf{t} ds = 0,$$

则曲线是曲率线，λ 是一主曲率。在这个情形下，$\mathrm{II} = -d\mathbf{N}\cdot d\mathbf{r} = \lambda ds^2 = \lambda[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2]$ 是对角型的。从此 $\mathbf{t}$ 是一主方向的向量。

推论 曲率线的微分方程是行列式

$$|\mathbf{N},\ d\mathbf{N},\ d\mathbf{r}| = 0 \qquad (3.29)$$

的解。

由（3.28），$d\mathbf{N} = d\mathbf{a}_3$ 是与 $\mathbf{N}$ 线性无关的，除非 $k_1 = k_2 = 0$。在后面的情形在脐点处才出现。这时（3.29）的行列式恒等于零，于是每个方向是主方向。若 $d\mathbf{N} \neq 0$，行列式只当 $d\mathbf{N} + \lambda d\mathbf{r} = 0$

时才等于0，因为$d\mathbf{r}$和N总是线性无关的。

任一标架$\{\mathbf{e}_i\}$可以从Darboux标架经过绕N旋转一个角$\varphi=(\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_1)$而得到。把导出方程（3.27）的论证特别可以应用到属于$\{\mathbf{e}_i\}$的线性形式以主曲率来表达，

$$\omega_1^3=(k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi)\omega^1 + (k_2-k_1)\cos\varphi\sin\varphi\omega^2,$$

$$\omega_2^3=(k_2-k_1)\cos\varphi\sin\varphi\omega^1 + (k_1\sin^2\varphi+k_2\cos^2\varphi)\omega^2,$$

标架$\{\mathbf{e}_i\}$是$d\mathbf{x}=\mathbf{t}ds$的一曲线x的标架，对于这个标架，ω^2在$d\mathbf{x}$上的值是0。从此与（3.26）（令$\omega^2=0$）比较，得

$$k_n=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi,$$

$$\tau_r=(k_2-k_1)\cos\varphi\sin\varphi, \tag{3.30}$$

其中第一个公式叫做Euler公式，这个公式给出法曲率这个命名的解释。k_n只依赖于曲面上一个给定点x与在这点的给定方向$\mathbf{e}_1=\mathbf{t}$，因而，在x切于$\mathbf{e}_1$的一切曲线都有共同的k_n。例如，可以计算r与由N和$\mathbf{e}_1$决定的法平面的交线，由于这条“法截线”，$\alpha=\frac{\pi}{2}$，因而$k_n=-k$。所以，除符号外，法曲率是法截线的曲率。

由作图，主曲率是不变量。在曲面论中，比这些量起更重要作用的是它们的平均数和乘积，即不变量。

$$K=k_1k_2,$$

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2), \tag{3.31}$$

K叫做曲面的高斯曲率或总曲率，H叫做曲面的平均曲率，K是Ⅱ关于曲率线参数的矩阵的行列式，H是它的迹的一半。行列式和迹是一个2×2矩阵关于任一旋转的两个不变量；从此

$$K=l_{11}l_{22}-l_{12}^2, \qquad (3.32)_1$$

$$H=\frac{1}{2}(l_{11}+l_{22}). \qquad (3.32)_2$$

平均曲率这个名称是根据下述性质而命名的。

若以 k_φ 表示与 k_1 所对应的主方向组成 φ 角的切线方向的法曲率，则由 Euler 公式 (3.30)，$k_\varphi=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi$，推出在曲面上一已知点的所有法曲率的平均值

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k_\varphi d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=H.$$

现在我们要证明一个重要的结果，叫做基本定理。ω_1^2 只与第一基本形式有关。

由 (3.21)：$d\omega^1=\omega_1^2\wedge\omega^2$，$d\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2$，假定还有 $\bar{\omega}_1^2$ 也满足这两个方程，则 $(\bar{\omega}_1^2-\omega_1^2)\wedge\omega^2=0$，$(\bar{\omega}_1^2-\omega_1^2)\wedge\omega^1=0$。这表明 $\bar{\omega}_1^2-\omega_1^2$ 既是 ω^2 的倍数，又是 ω^1 的倍数；可是 ω^1，ω^2 是独立的，从而 $\bar{\omega}_1^2=\omega_1^2$，所以 ω_1^2 由 ω^1，ω^2 唯一确定，即由 $ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)$ 唯一确定。

其次，要证明

Gauss 定理 曲率 K 只与第一基本形式有关。

把 (3.23) 代入 (3.22)，就有

$$d\omega_1^2=-(l_{11}\omega^1+l_{12}\omega^2)\wedge(l_{12}\omega^1+l_{22}\omega^2)$$
$$=-(l_{11}l_{22}-l_{12}^2)\omega^1\wedge\omega^2,$$

从此与 $(3.32)_1$，即得

$$d\omega_1^2=-K\omega^1\wedge\omega^2. \qquad (3.33)$$

但 ω_1^2，ω^1，ω^2 只与 ds^2 有关，所以 K 只与 ds^2 有关。

从上述结果引出下面的定义与定理。

定义 当两个曲面 S_1，S_2 之间能够决定一个一对一的连续对应，在这个对应下，使 S_1，S_2 的线素相等：$ds_1^2(u^1,u^2)=ds_2^2(u^1,u^2)$，则称这两个曲两是等距的。

由方程 (3.33) 和上面对 ω_1^2 的阐明，就获得

定理2.13 (Egregium 定理；Gauss) 等距曲面的总曲率恒等。

3. 绝对微分与 Levi-Civita 平行移动. 测地线 按照上面的讨论，我们看到，若对曲面采用 Darboux 标架，则从 (3.28) 可知

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_1 &= \omega_1^2\mathbf{e}_2+\omega_1^3\mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_2 &= -\omega_2^1\mathbf{e}_1+\omega_2^3\mathbf{e}_3 \end{aligned} \qquad (\omega_i^j=-\omega_j^i). \tag{3.34}$$

定义 在曲面上一点 A 的向量 λ 的微分 $d\lambda$ 按照在点 A 的法线方向在切面上的投影称为 λ 的绝对微分；记作 $D\lambda$：

$$D\lambda=d\lambda \text{ 在切面上的投影。}$$

例如，从 (3.34) 可知

$$D\mathbf{e}_1=\omega_1^2\mathbf{e}_2, \quad D\mathbf{e}_2=-\omega_2^1\mathbf{e}_1. \tag{3.35}$$

从绝对微分得到 Levi-Civita 平行移动的概念。

定义 设 C 为一条曲面曲线，若所选取的活动标架使沿曲线 C 各点有 $\omega_1^2=0$，则称标架向量 e_1，e_2 沿曲线平行移动。Levi-Civita 平行移动的重要性质是上面所指的基本定理。一个曲面只要 I 确定之后，不管它在 E^3 中如何弯曲，定出一切正交活动标架是不变的，每个活动标架确定一个 ω_1^2，这就是 ω_1^2 由 I 来确定的含义。这样的 ω_1^2 给出 Levi-Civita 平行移动。

由基本定理可见，Levi-Civita 平行性只与曲面的度量有关，也就是与它在空间 E^3 中的位置无关。

下面要讨论用活动标架如何处理曲面曲线。

设 C 为曲面 S 上一条曲线，并取定了 S 的法向量 $\mathbf{e}_3$ 和 C 的切向量 $\mathbf{e}_1$，这样就确定了活动标架：$\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1$。对于曲线 C 有 $dr=\omega^1e_1$，故有

$$\omega^2=0, \quad D\mathbf{e}_1=\omega_1^2\mathbf{e}_2.$$

定义 若对曲线 C 有 $\omega_1^2=0$，则称为测地线。

由此可见，测地线的性质是：它上面一切切线都平行。这就是平面上直线的推广。

测地线还有一个重要性质，就是

定理2.14 在曲面上两点间的最短曲线C必为测地线。

证 设曲线C是曲面上两点A，B之间的最短曲线。把C安置在一族曲线$r(t,u)$里，其中t是曲线参数。设$u=u_0$时为曲线C，并设这族曲线都以A，B为端点。选取$\mathbf{e}_1$是族中曲线的单位切向量。于是$\mathbf{e}_1$也是t和u的函数，取定曲面的法向量$\mathbf{e}_3$。这样就确定了活动标架，它是t，u的函数。

结构方程$d\omega^1=\omega_1^2\wedge\omega_2$对上述曲线族有

$$\omega^1=\theta^1+a^1du,\ \theta^1\text{ 是弧长函数,}$$
$$\omega^2=a^2du.$$

a^1，a^2依赖于曲线族参数t，u，代入结构方程：

$$d(\theta^1+a^1du)=a^2\omega_1^2\wedge du,$$

又因

$$d(\theta^1+a^1du)=du\wedge\frac{\partial\theta^1}{\partial u}+da^1\wedge du,$$

故有

$$du\wedge\frac{\partial\theta^1}{\partial u}=du\wedge(da^1-a^2\omega_1^2),$$

于是

$$\frac{\partial\theta^1}{\partial u}=da^1-a^2\omega_1^2+bdu.$$

令l为曲线的长，对t求积分$\int\theta^1=l_0$，

$$\frac{\partial}{\partial u}l=\int\frac{\partial}{\partial u}\theta^1=a^1\Big|_{\partial C}-\int a^2\omega_1^2+b\int du=a^1\Big|_{\partial C}-\int a^2\omega_1^2,$$

这就是曲线弧长的第一变分，记作δl。

设曲线的端点固定，a^1 在 ∂C（两个端点）上为0，则

$$\delta l = -\int a^2 \omega_1^2,$$

因为对任意选择的 a^2，δl 应为零．故 $\omega_1^2 = 0$。证毕。

从上面所作的讨论可以看出一切性质都是从结构方程得到的。

现在来证明**测地曲率** $k_g = 0$ **的曲面曲线** C **是测地线**；**其逆，沿测地线的每点都有** $k_g = 0$．

事实上，关于曲面曲线 C 的标架 {t，T，N}，有 $\omega_1^2 = k_g ds$（见（3.16）和（3.18）$_1$）。由此可见，ω_1^2 与 k_g 同时等于零。

证毕。

我们知道，由于 ω_1^2 和 ds 都是等距不变量，所以，k_g **也是等距不变量**。

此外，从 $k_g = k\cos\alpha$ 可知，当 T 与 N 垂直时（即 T 与曲线 C 从法线 b 重合时），则 $k_g = 0$，即曲线 C 是测地线．这时，曲线 C 的主法线与曲面法线重合，故有

定理2.15 一条曲面曲线 C 是测地线的一个充要条件是：在 C 上每点的主法线重合于在该点的曲面法线，即 C 的密切平面包含曲面法线。

4. Gauss-Bonnet 公式 在§1.5.3中已经证明了 Stokes 定理：

$$\oint_{\partial U} \omega = \iint_U d\omega,$$

式中 U 是 $p+1$ 维区域，∂U 是 U 的边界．由方程(3.33)，$\oint_{\partial U} \omega_1^2 = -\iint_U K\omega^1 \wedge \omega^2$。令 θ 为从一给定标架$\{\mathbf{e}_i\}$到 ∂U 的一阶标架的旋转角，则由（3.18）$_1$，$\omega_1^2 = k_g ds - d\theta$，即，

$$\iint_U K\omega^1 \wedge \omega^2 + \oint_{\partial U} k_g ds = \oint_{\partial U} d\theta, \qquad (3.36)$$

这是著名的 Gauss-Bonnet 公式，它是整体微分几何的最有力的工具之一。

若 ∂U 是逐段可微的，则 $d\theta$ 的积分只取在光滑弧上，在曲线 ∂U 的一个顶点 P_i 处，θ 的跳跃是在弧长上升的方向计算内角 θ_i（图 2.15），用内角表示

$$\varphi_i=\pi-\theta_i,\quad \oint d\theta=2\pi-\sum_i(\pi-\varphi_i);$$

从此

$$\iint_U K\alpha+\oint k_g ds=2\pi+\sum_i(\varphi_i-\pi). \tag{3.36$'$}$$

我们给出这个公式的一些应用。

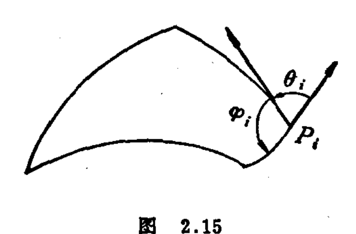


图 2.15

在一个常曲率曲面上，令 ∂U 为一测地多角形，即由包围曲面的一个单连通区域 U 的 k 条测地弧组成的一曲线。多角形的角缺是 $\Delta=\Sigma\varphi_i-(k-2)\pi$。多角形的面积 A 是与角缺成比例的，又因为沿测地弧的 $k_g=0$，并由 (3.36)$'$，

$$\Delta=KA. \tag{3.37}$$

由定义，面积总是正的。从 (3.37) 便得

定理2.16 (Gauss) 一测地三角形的内角之和在 $K=$常数 <0 的曲面上是 $>\pi$，而在 $K=$常数 >0 的曲面上是 $<\pi$，在 $K=0$ 的曲面上 $=\pi$。

设一个定向闭曲面 S 是由具边界曲线 C_{ij} 的曲面块 U_i 所覆盖。令 V 是在曲面上的多角形 ∂U_i 的顶点数，E 为弧 C_{ij} 的数，F 为曲面块的数（=单连通区域数），对每个 U_i，我们有一个 Bonnet 公式 (3.36)$'$：

$$\iint_{U_i} K\alpha + \sum_i \oint_{C_{ij}} k_g ds = \sum \varphi_r - \sum \pi + 2\pi.$$

若把所有这些方程相加，则在左边出现曲面的整曲率$\iint K\alpha$，对一定向曲面，$\Sigma\oint k_g ds = 0$，因为每条C_{ij}以相反的定向出现两次，在右边，每个顶点P_i产生内角之和2π。从此$\Sigma\Sigma\varphi_r = 2\pi V$。在第二项中，每个角产生$\pi$。在一闭多角形中，角数等于边数。每边属于两个不同的多角形。从此$\Sigma\Sigma\pi = 2\pi E$。方程的个数之和是F。这表明，

$$\iint K\alpha = 2\pi(V - E + F). \tag{3.38}$$

数$V - E + F$是曲面S上多角形网的Euler特征数，通常记作$\chi(S)$。

定理2.17 一定向闭曲面S的Euler特征数是不依赖于S上多角形网的选择。

在任一微分同胚*下，一个多角形网变到另一这样的网。

推论 整曲率是在任一微分同胚下的不变式（简称为拓扑不变式）。

要严格地证明$\chi(S)$是拓扑不变式的事实是属于拓扑学的范围，这里不作证明，但是，从公式（3.38）即

$$\iint_S K\alpha = 2\pi\chi(S) \tag{3.38'}$$

可粗糙地得出直观的证明。

事实上，假定把由任意多角形而围成的曲面S的形状加以弯曲，以S'表示经过弯曲后的曲面，则从（3.38）′得出

---

* 一个一对一的映射f使得f和它的逆f^{-1}都是连续的，则称f为一同胚，若f和f^{-1}都是可微的，则称f为一微分同胚（见§1.1.7）。

$$\iint\limits_{S'} K\alpha = \iint\limits_{S} K\alpha,$$

可是由任意曲线多角形而围成的曲面 S' 有

$$\iint\limits_{S'} K\alpha = 2\pi\chi(S'),$$

由此可见，对闭曲面 S 与它同胚的象 S' 必有 $\chi(S)=\chi(S')$，即 $\chi(S)$ 是拓扑不变式。

不难验证，球面和环面的 Euler 特征数分别是 0 和 1。一般地，象具有 p 个洞的曲面称为亏格 p 的曲面，如所知，对这种曲面有

$$\chi(S)=2(1-p).$$

如下列图中所示。

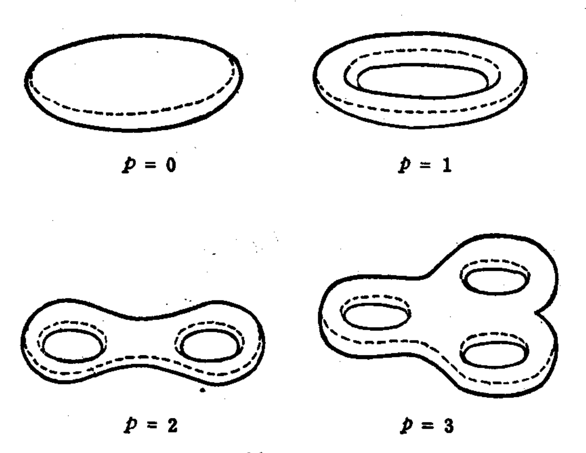


图 2.16

通称为 Euler 多面体定理是判定在初等几何意义下多面体的顶点、棱、面的个数 V，E，F 之间存在着的关系：

$$V-E+F=2 \tag{3.39}$$

把这个多面体看作橡皮做成的，把空气打进去使它膨胀起来，变

成一个球面．这样，球面是由给定的多角形的顶点、棱、面的象构成的曲线多角形所围成，所以有

$$\iint_S K\alpha = 2\pi\chi.$$

可是就所论的球面来讲，$K=\frac{1}{R^2}$，面积为 $4\pi R^2$，所以从上式得 $\chi=2$．由于在球面的所论曲线多角形包围下，顶点、棱、面的个数与给定的多面体的顶点、棱、面的个数显然相同，因而得到公式（3.39）的微分几何的证明．

从 Gauss-Bonnet 公式还可以导出测地曲率的新定义：设 A 和 B 为一条曲面曲线 Γ 的两个邻点，在 A 和 B 分别引同曲线 Γ 相切的测地线，假设它们交于 T，其交角为 $\Delta\varphi$，则

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{d\varphi}{ds}$$

称为曲线 Γ 在点 A 的**测地曲率**，这里 Δs 表示 A，B 之间的弧长（图 2.17）．

显然，这个定义是平面曲线的曲率的直接推广．

我们可以证明这个新定义同以前所定义的测地曲率 k_g 是一致的．证明见方德植〔Ⅰ〕208—209．

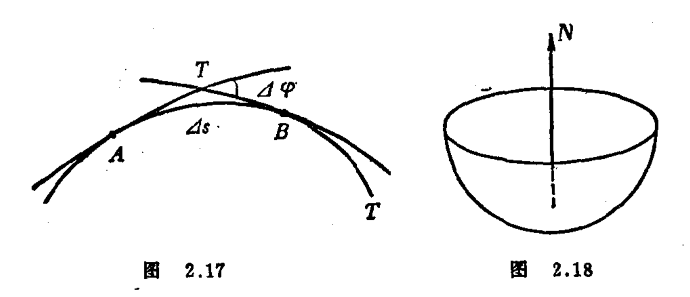


图 2.17　　　　图 2.18

5．曲面在每点邻近的形状　现在我们利用 $K(\mathbf{r}_0)$ 的符号给出曲面 $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ 在 $\mathbf{r}_0$ 邻近的形状；分为下列三种可能情形：

1° 若$K(\mathbf{r}_0)>0$，则称$\mathbf{r}_0$为曲面的一椭圆点。这时，由(3.31)$_1$可知

$$\operatorname{sgn}k_1=\operatorname{sgn}k_2.$$

再由（3.30）通过N的所有法截线的曲率同号。这些法截线与在$\mathbf{r}_0$的顶点一起构成碗的形状（图2.18），由（3.19）推出

$$d\mathbf{r}``\times"d\mathbf{r}=2\omega^1\wedge\omega^2\mathbf{N},$$

与（3.14）比较，便得曲面的面积元素

$$\alpha=\omega^1\wedge\omega^2, \tag{3.40}$$

映射$\mathbf{r}\to\mathbf{N}(\mathbf{r})$是曲面的球面象。$\mathbf{N}(\mathbf{r})$是单位球面上一点。单位球面所对应的曲面面积元素从$d\mathbf{N}``\times"d\mathbf{N}=2\omega_1^3\wedge\omega_2^3\mathbf{N}$而得到，由（3.22）和（3.33）可知，这就是$K\omega^1\wedge\omega^2$。由此可见，$K$是$\mathbf{r}$的面积元素与它的球面象的对应面积元素之比。如果$\mathbf{r}$是半径为$R$的球面，则其面积元素是$R^2$乘单位球面的面积元素，$K=R^{-2}$。围绕$\mathbf{r}_0$的一个小球冠的面积是接近于半径$K^{-1/2}$的球面上一个球冠。

2° 若$K(\mathbf{r}_0)=0$，则称$\mathbf{r}_0$为曲面的一抛物点。这时，由(3.31)$_1$可知，至少有一主曲率为零。如果$k_1=k_2=0$，则$\mathbf{r}_0$是一个平坦脐点$d\mathbf{N}=0$，并且每条法截线与它的切线在$\mathbf{r}_0$的接触阶$\geqslant 2$。如果$k_1=0$，$k_2\neq 0$，则除$\pm e_1$外，对所有方向有$\operatorname{sgn}k_n=\operatorname{sgn}k_2$（图2.19）。

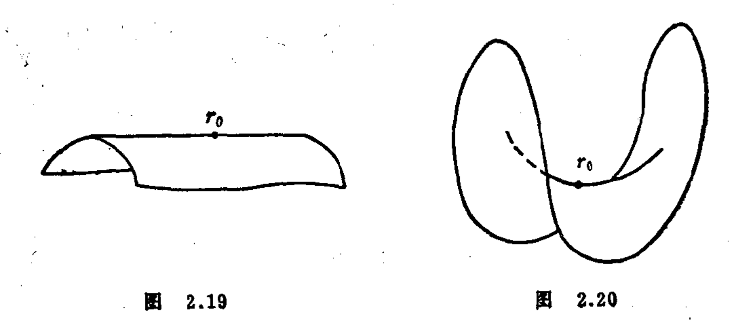


图 2.19　　　　图 2.20

3° 若$K(\mathbf{r}_0)<0$，则称$\mathbf{r}_0$为曲面的一双曲点。这时有两个不同的方向使$k_n=0$（从此$\mathrm{II}=0$），称为渐近方向。这两方向把切面分为四部分，在每个部分中，k_n的符号一定。若从一个部分跨过相邻的部分，则k_n要变号。$\mathbf{r}_0$为一马鞍点(图2.20)。

对一切实际的计算，知道曲面的法线N是重要的。N可从定义方程（3.9）来计算。从

$$\mathbf{r}_{u^1}\cdot\mathbf{r}_{u^2}=|\mathbf{r}_{u^1}|\cdot|\mathbf{r}_{u^2}|\cos\varphi=F,$$

可以得到参数曲线之间的夹角φ，从此

$$|\mathbf{r}_{u^1}\times\mathbf{r}_{u^2}|=|\mathbf{r}_{u^1}||\mathbf{r}_{u^2}|\sin\varphi=(EG-F^2)^{1/2},$$

$$\mathbf{N}=(EG-F^2)^{-1/2}\mathbf{r}_{u^1}\times\mathbf{r}_{u^2}.$$

若知道N，则总曲率和平均曲率最好使用Hopf和Voss导出的一组公式来计算。从方程（3.40），（3.32），Frenet方程和$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)=1$，容易验证：

$$\text{“}|\mathbf{N},\ d\mathbf{r},\ d\mathbf{r}|\text{”}=2\alpha, \tag{3.40$'$}$$

$$\text{“}|\mathbf{N},\ d\mathbf{r},\ d\mathbf{N}|\text{”}=-2H\alpha, \tag{3.41}$$

$$\text{“}|\mathbf{N},\ d\mathbf{N},\ d\mathbf{N}|\text{”}=2K\alpha. \tag{3.42}$$

线性形式ω^i仅对正交参数曲线（$F=0$）是容易得到的。在这个情形下，$\omega^1=\sqrt{E}\,du^1, \omega^2=\sqrt{G}\,du^2$，并由（3.21），$\omega_1^2=\frac{1}{2}(EG)^{-1/2}(-E_{u^2}du^1+G_{u^1}du^2)$.

6. n维空间E^n中的超曲面M^{n-1} 现在我们要研究的是n维欧氏空间E^n的运动群下不变的性质，所以要选取适合我们的目的的标架。标架是由有关的李群来决定的。对于在E^n中超曲面M^{n-1}的论述可象E^3中曲面那样来进行。

设在E^n中任意给定两个标架，则存在一个唯一的运动把其中一个变到另一个。因此E^n的标架应取正交的，可写为

$$(\mathbf{r},\ \mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)\qquad \mathbf{r}\in M_{n-1},$$

$$(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j)=\delta_i^j \qquad (\mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)=+1,$$

这里拉丁字母 i，j，k，…代表 1 到 n 的指标。

与三维的情形一样，我们有描写标架的无穷小位移公式：

$$d\mathbf{r}=\omega^i\mathbf{e}_i,$$

$$d\{\mathbf{e}_i\}=(\omega_i^j)\{\mathbf{e}_j\},$$

由正交条件，有

$$\omega_i^j=-\omega_j^i.$$

从 $d(d\mathbf{r})=0$，$d(d\mathbf{e}^i)=0$ 导出下列重要的"结构方程"：

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i,$$

$$d\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k.$$

现在在超曲面上 $\mathbf{r}$ 处作一个标架，使得 $\mathbf{e}_\alpha\in T_r$（$1\leqslant\alpha\leqslant n-1$）和 $\mathbf{e}_n$ 是唯一的法线 $\mathbf{N}=(\mathbf{e}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_{n-1})$。解 $\mathbf{N}\mathbf{e}_\alpha=0$ 可以唯一地确定（除符号外）单位向量 $\mathbf{N}$。这里希腊字母 α，β，…代表 1 到 $n-1$ 的指标。因 r 限制在 M^{n-1} 上，所以

$$d\mathbf{r}=\omega^1\mathbf{e}_1+\cdots+\omega^{n-1}\mathbf{e}_{n-1}=\omega^\alpha\mathbf{e}_\alpha.$$

因为在 M^{n-1} 上 $\omega^n=0$，因而 $d\omega^n=0$，即

$$\omega^\beta\wedge\omega_\beta^n=0. \tag{3.43}$$

因为 ω^1，…，ω^{n-1} 是线性无关的，所以根据 Cartan 引理（定理 1.5），存在函数 $l_{\alpha\beta}$ 使得

$$\omega_\alpha^n=l_{\alpha\beta}\omega^\beta,\quad l_{\alpha\beta}=l_{\beta\alpha}. \tag{3.44}$$

M_{n-1} 的第一基本形式是

$$ds^2=(d\mathbf{r},\ d\mathbf{r})=(\omega^1)^2+\cdots+(\omega^{n-1})^2.$$

M^{n-1} 的结构方程是

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha&=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha,\\ d\omega_i^k&=\omega_i^j\wedge\omega_j^k, \end{aligned} \tag{3.45}$$

把 $d\mathbf{r}=\omega^\alpha e_\alpha$ 微分，得

$$d^2\mathbf{r}=d\omega^\alpha\mathbf{e}_\alpha+\omega^\alpha d\mathbf{e}_\alpha,$$

由于 $(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{N})=0$。利用 $d\mathbf{e}_i=\omega_i^j\mathbf{e}_j$ 和（3.44）就有

$$\begin{aligned}-d\mathbf{N}d\mathbf{r}&=(d^2\mathbf{r}, \mathbf{N})=\omega^\alpha(d\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{N})\\&=\omega^\alpha\omega_\alpha^j(\mathbf{e}_j, \mathbf{N})=\omega^\alpha\omega_\alpha^n(\mathbf{e}_n, \mathbf{N})\\&=\omega^\alpha\omega_\alpha^n=l_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta.\end{aligned}$$

我们定义第二基本形式为

$$\mathrm{II}=-d\mathbf{N}d\mathbf{r}=(d^2\mathbf{r}, \mathbf{N})=l_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta \quad (l_{\alpha\beta}=l_{\beta\alpha}),$$

它是一个对称二次型。引用一个保留 N 不动的正交变换可以把它对角化。设 $\{\mathbf{a}_i\}$ 为对应标架和 π^α，π_i^j 为它的线性形式；则 $\pi_\alpha^n=k_\alpha\pi^\alpha$，$k_\alpha$ 是**主曲率**（$\alpha=1, 2, \cdots, n-1$）。

推广的 H 和 K 是主曲率的**初等对称函数**。

$$\binom{n-1}{1}H_1=\sum k_\alpha,$$

$$\binom{n-1}{2}H_2=\sum k_{\alpha_1}k_{\alpha_2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\binom{n-1}{n-1}H_{n-1}=k_{\alpha_1}k_{\alpha_2}\cdots k_{\alpha_{n-1}}.$$

π_α^β 从（3.45）可以计算，主曲率从 $d\pi_\alpha^\beta=\pi_\alpha^j\wedge\pi_j^\beta=\pi_\alpha^\gamma\wedge\pi_\gamma^\beta=\pi_\alpha^\gamma\wedge\pi_\gamma^\beta-k_\alpha k_\beta\pi^\alpha\wedge\pi^\beta$ 可以计算。由此可见，主曲率是单由 ds^2 决定的（对曲面没有相当的结果成立）。（3.45）的其余方程

$$d\pi_\alpha^n=d(k_\alpha\pi^\alpha)=k_\alpha k_\beta\pi^\alpha\wedge\pi^\beta$$

是对 k_α 的一组偏微分方程，从此也是对第一基本形式 $ds^2=d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}=g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ 的系数 $g_{\alpha\beta}$ 的一组偏微分方程。

下列命题让读者证明：

1° 在曲面的切面T_r上的曲线$\mathrm{i}(\varphi)=k_n(\varphi)^{-1/2}\cdot(\mathrm{e}_1\cos\varphi+\mathrm{e}_2\sin\varphi)$称为Dupin标形。证明在椭圆点、双曲点和抛物点的Dupin标形分别为一椭圆、一对共轭双曲线和一对平行直线。

2° 主曲率是二次型$k\,\mathrm{I}-\mathrm{II}$的矩阵行列式等于零的两个$k$的数值（应用(3.20)）。从此导出$K$和$H$作为$E$，$F$，$G$和$l_{ij}$的函数的一个公式。

3° 证明对任一曲面，$H^2-K\geqslant 0$。

4° 一曲面r以距离c的平行曲面为

$$\mathrm{r}_c(u^1,\ u^2)=\mathrm{r}(u^1,\ u^2)+c\mathrm{N}(u^1,\ u^2).$$

(a) 证明在曲面和它的平行曲面的对应点处的切面是平行的。

(b) 如果r是包围一体积V_0的一个凸闭曲面。证明由r_c所包围的体积为$V_0+A_0c+c^2\int H\alpha+\frac{1}{3}c^3\int K\alpha$，式中$A_0$是$\mathrm{r}$的曲面面积（steiner）。

5° 证明沿两个垂直方向的法曲率之和总是$2H$。

6° 令C为通过曲面r上一点r_0的一条平截线，φ为a_1与T_0和C的平面的交线的角，θ为N与C的平面的法线的交角。

(a) 计算C的曲率k_C作为k_1，k_2，φ，θ的一个函数。

(b) $C(\theta)$的曲率中心与对应法截线$C(0)$的曲率中心的连线垂直于N（Meusnier，1776）。

7° $\mathrm{III}=d\mathrm{N}\cdot d\mathrm{N}$叫做曲面的第三基本形式，证明

$$K\,\mathrm{I}-2H\,\mathrm{II}+\mathrm{III}=0.$$

8° 如果曲面上两族曲线中在任一点的不同族中两曲线的切线关于主方向是对称的，则称这两族曲线是共轭的。证明只有共轭族，使它的两族曲线互为正交轨线是曲率线（Dupin）。

9° 设$\mathrm{r}(u^1,\ u^2)$是R^4中一个（二维）局部子空间。对一标架族$\{\mathrm{e}_i\}$（e_1，$\mathrm{e}_2\in T_r$，e_3，e_4正交于子空间）属于一Frenet

方程$de_i=\omega_i^j e_j(\omega_i^j=-\omega_j^i)$。研究由

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

的一个标架变换在Cartan矩阵上的作用。导出相当于(3.21)和(3.22)的方程，证明

$$(\omega_1^3,\ \omega_2^3,\ \omega_1^4,\ \omega_2^4)=(\omega^1,\ \omega^2)\begin{pmatrix} a & b & f & g \\ b & c & g & h \end{pmatrix}.$$

证明，一般，一个不变标架由条件$a+c=0$，$b=0$便可以得到。我们得到多少个不变式？叙述关于a，b，c的条件，使在这些条件下，不能找到满足$a+c=b=0$的旋转。

7．杂例

（1）主曲率等于常数的曲面　由曲面S上一个可迁欧氏运动群把曲面变到自身去的是怎样的曲面？在E^3中这样一个群，它可以把曲面S的一已知点r_0变到任一其他点r去必须至少有两个参数，并且S的主曲率必为常数。在这个情形下，

$$d\pi_1^3=k_1 d\pi^1=k_1\pi_1^2\wedge\pi^2$$
$$=\pi_1^2\wedge\pi_2^3=k_2\pi_1^2\wedge\pi^2.$$

从此，或者

$$k_1=k_2,$$

这时曲面上一切点都是脐点，或者

$$\pi_1^2\equiv 0.$$

因为π^2不能是零形式，如果ds^2是正定的。

现在分别讨论如下：

A．若曲面的一切点都是脐点，则Rodrigues方程$dN+\lambda dr=0$关于dr必须是一个恒等式。

1. 若 $\lambda=0$，则 $d\mathrm{N}=0$，N 是常向量。于是曲面 r 是平面 $(\mathrm{r}-\mathrm{r}_0)\cdot\mathrm{N}=0$。

2. 若 $\lambda\neq 0$，则 $d(d\mathrm{N}+\lambda d\mathrm{r})=d\lambda\wedge d\mathrm{r}=0$ 必为一恒等式；从此 $d\lambda=0$，$\lambda=\mathrm{const}$。我们可取一固定坐标系使得 $\mathrm{N}_0=\mathrm{r}_0$，则对曲面上一切点，$\mathrm{N}(\mathrm{r})=\lambda\mathrm{r}$。于是曲面是球面 $\mathrm{r}\cdot\mathrm{r}=|\lambda|^{-2}$，与过原点的射线正交的曲面。从这个证明推出，都是脐点的曲面必为常曲率曲面。对于平面，$d\mathrm{N}=0$ 推出 $k_1=k_2=0$。对于球面，前一段已证过，$K=k_1k_2=R^{-2}$；从此

$$k_1=k_2=R^{-1}=\mathrm{const}.$$

总之，我们有

定理2.18 若曲面 S 上的点都是脐点，则 S 或者是平面的一部分，或者是球面的一部分。

如果经过一欧氏运动群把曲面变到自身，它必为一全平面或一全球面。

B. 若 $\pi_1^2=0$，则由方程 (3.28)，$d\pi^1=d\pi^2=0$。若写 $\pi^i=a_1du^1+a_2du^2$，$d\pi^i=0$ 表明 $\partial a_1/\partial u^2=\partial a_2/\partial u^1$；这是存在一函数 q^i 使 $dq^i=\pi^i$ 的充要条件。经过参数变换，$ds^2=(dq^1)^2+(dq^2)$，这表明曲面与一平面是等距的。因为 $q^i=\mathrm{const}$ 推出 $\pi^i=0$，所以 q^i 是曲率线参数。若曲面不是一平面（A，1. 情形），我们可假定 $k_1\neq 0$，则曲率线 $q^2=\mathrm{const}$ 从 Frenet 方程

$$\frac{d}{dq^1}\begin{pmatrix}\mathrm{a}_1\\ \mathrm{a}_2\\ \mathrm{a}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & k_1\\ 0 & 0 & 0\\ -k_1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{a}_1\\ \mathrm{a}_2\\ \mathrm{a}_3\end{pmatrix}$$

可以得到。这些曲线是平面 $(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_3)$ 上半径为 k_1^{-1} 的圆。从 (3.33)

$$K=k_1k_2=0,$$

可知 $k_2=0$。曲率线 $q^1=\mathrm{const}$ 的 Frenet 方程是 $d\{\mathrm{a}_i\}=0$。这些曲线是垂直于圆 $q^2=\mathrm{const}$ 的直线。于是 r 是一个正圆柱面。

在知道曲面以后，群是容易决定的，就是

定理2.19 在 E^3 中，可迁地作用在一曲面上的欧氏运动群只是（除同构外）

a．平面欧氏运动群

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{x}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+(a,\ b,\ 0)$$

可迁地作用在平面 $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{e}_3=0$ 上。

b．群 O_3，$\mathbf{x}^*=\mathbf{x}A$，可迁地作用在球面 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=R^2$ 上。

c．双参数群

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{x}\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}+(0,\ c,\ 0)$$

可迁地作用在正圆柱面 $(x^1)^2+(x^3)^2=R^2$ 上。

具有定值主曲率的曲面只有这里所描述的几种曲面。

这个定理的一个重要的推论是，可以具有常主曲率并带有双曲点的曲面是没有的。

（2）极小曲面　平均曲率 $H=0$ 的曲面叫做极小曲面。我们对极小曲面的理论仅给以很简单的叙述。对这方面较深入的理论，几乎是以复变函数论作为基础的。

极小曲面是变分法中下述问题的 Euler 方程的解。给定一闭曲线 C，$\mathbf{r}$ 是以 C 为边界的一曲面。〔C 是点集 $\mathbf{r}(u^1,\ u^2)$（不是 $\mathbf{r}$ 的点）在 E^3 中的聚点集。〕令 $\eta(r)$ 是在有界曲面上的任一可微函数，并在 C 上等于零。$\mathbf{r}^*=\mathbf{r}+\varepsilon\eta\mathbf{N}$ 是展布在 C 上的一曲面族，并对小的 ε 接近于 $\mathbf{r}$。我们寻找 $\mathbf{r}$ 的条件，使得 $\mathbf{r}$ 与邻近曲面 $\mathbf{r}^*$ 比较是一个曲面面积极小的曲面。（由直观显然可知，没有极大面积的曲面。）$\mathbf{r}^*$ 的线素（略去 ε 项）是

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}^*\cdot d\mathbf{r}^* &= E^*(du^1)^2+2F^*du^1du^2+G^*(du^2)^2 \\ &= d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}+2\varepsilon\eta d\mathbf{N}\cdot d\mathbf{r}+\cdots. \end{aligned}$$

从此

$$E^* = E - 2\varepsilon\eta l_{11} + \cdots,$$

$$F^* = F - 2\varepsilon\eta l_{12} + \cdots,$$

$$G^* = G - 2\varepsilon\eta l_{22} + \cdots.$$

从而得到曲面 $\mathbf{r}^*$ 的面积元素

$$\begin{aligned}\alpha^* &= (E^*G^* - F^{*2})^{1/2} du^1 \wedge du^2 \\ &= [(EG - F^2)(1 - 2\varepsilon\eta H) + \cdots]^{1/2} du^1 \wedge du^2.\end{aligned}$$

变分问题的 Euler 方程是条件

$$\left.\frac{d\alpha^*}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0, \qquad \text{对一切 } \eta,$$

即

$$H = 0.$$

从物理方面来看，把金属圈放入肥皂水中，使在金属圈上张成薄膜，若不计重力的影响，这薄膜形成极小曲面。

（3）**椭球面的研究**　半轴 $a^1 > a^2 > a^3$ 的椭球面是满足

$$\frac{(x^1)^2}{(a^1)^2} + \frac{(x^2)^2}{(a^2)^2} + \frac{(x^3)^2}{(a^3)^2} = 1$$

的点集。它的切线的方向 $d\mathbf{r} = (dx^i)$ 是

$$\frac{x^1 dx^1}{(a^1)^2} + \frac{x^2 dx^2}{(a^2)^2} + \frac{x^3 dx^3}{(a^3)^2} = 0 \tag{3.46}$$

的解。由此推出 $\mathbf{N}$ 是沿着方向 $(x^i/(a^i)^2)$ 的单位向量。所以 $d\mathbf{N}$ 是沿方向 $(dx^i/(a^i)^2)$ 的一个向量与沿方向 $\mathbf{N}$ 的一个向量之和。因此，由（3.29）可知曲率线是（由前段的推论）

$$\left| \frac{x^i}{(a^i)^2}, \ \frac{dx^i}{(a^i)^2}, \ dx^i \right| = 0 \tag{3.47}$$

的积分曲线。把第 i 列乘以 $(a^i)^2$ 并展开：

$$((a^1)^2-(a^3)^2)x^2dx^1dx^3+((a^2)^2-(a^1)^2)x^3dx^2dx^1$$
$$+((a^3)^2-(a^2)^2)x^1dx^3dx^2=0.$$

首先假定 $x^3\neq 0$。用 $x^3/(a^3)^2$ 乘，并借助于 (3.46) 和 (3.47) 消去 x^3 和 dx^3：

$$dx^1dx^2\left\{(x^1)^2-\frac{(a^1)^2[(a^2)^2-(a^3)^2]}{(a^2)^2[(a^1)^2-(a^3)^2]}(x^2)^2\right.$$
$$\left.-\frac{(a^1)^2[(a^1)^2-(a^2)^2]}{(a^1)^2-(a^3)^2}\right\}$$
$$+x^1x^2\left\{\frac{(a^1)^2[(a^2)^2-(a^3)^2]}{(a^2)^2[(a^1)^2-(a^3)^2]}\right.$$
$$\left.\cdot(dx^2)^2-(dx^1)^2\right\}=0. \qquad (3.48)$$

因在一个脐点处，(3.48) 对任意的 dx^1 和 dx^2 都成立。故一个脐点满足

$$(x^1)^2-\frac{(a^1)^2[(a^2)^2-(a^3)^2]}{(a^2)^2[(a^1)^2-(a^3)^2]}(x^2)^2-\frac{(a^1)^2[(a^1)^2-(a^2)^2]}{(a^1)^2-(a^3)^2}=0.$$

$$x^1x^2=0.$$

从而只有四个实脐点：

$$(x^1)^2=(a^1)^2\frac{(a^1)^2-(a^2)^2}{(a^1)^2-(a^3)^2},\quad (x^2)^2=0,$$

$$(x^3)^2=(a^3)^2\frac{(a^2)^2-(a^3)^2}{(a^1)^2-(a^3)^2}, \qquad (3.49)$$

它们是在最大和最小半轴的平面上。对 $x^3=0$ 我们可以消去 x^2, dx^2，替代 x^3 和 dx^3。不能求出实脐点。

切面 (3.46) 也可写为

$$\frac{x^1X^1}{(a^1)^2}+\frac{x^2X^2}{(a^2)^2}+\frac{x^3X^3}{(a^3)^2}=1,$$

其中 (x^i) 是切点，(X^i) 是平面上的流动坐标。从原点到一平面 $A_iX^i=B$ 的距离是 $D=B/(\Sigma A_i^2)^{1/2}$，对椭球面，我们有

$$\frac{1}{D^2}=\sum\frac{(x^i)^2}{(a^i)^4}. \qquad (3.50)$$

平面 $\sum x^i X^i/(a^i)^2=0$ 是对 (x^i) 的直径平面；它是通过椭球面的中心并平行于在 (x^i) 的切面。它与椭球面的交线是对 (x^i) 的中心截线。椭球面与平行于直径平面的一切交线是一球面与一族平行平面的圆截线关于一个正常仿射变换下的象；从此，它们是互相位似的。现在我们取一个新的笛氏坐标系：原点在 $X=(x^i)$，x 轴和 y 轴在 T_x 上，z 轴是 T_x 指向内部的法线。椭球面的方程自然是二次的，它取形式

$$z=rx^2+2sxy+ty^2.$$

平行于对 x 的中心截线的一平截线的方程是

$$rx^2+2sxy+ty^2=\text{const}.$$

从 $\bar{\mathbf{N}}\cdot d\mathbf{r}=0$ 经过微分推出 $d\mathbf{N}\cdot d\mathbf{r}+\mathbf{N}\cdot d^2\mathbf{r}=0$。从此第二基本形式：

$$\begin{aligned}\mathrm{II}=\mathbf{N}\cdot d^2r=&(EG-F^2)^{-1/2}(\mathbf{r}_{u^1},\ \mathbf{r}_{u^2},\ \mathbf{r}_{u^1u^1}(du^1)^2\\&+2\mathbf{r}_{u^1u^2}du^1du^2+\mathbf{r}_{u^2u^2}(du^2)^2),\end{aligned} \qquad (3.51)$$

对 $u^1=x$，$u^2=y$，我们得到 $\mathrm{II}(x)=rx^2+2sxy+ty^2$。如果椭圆参考于它的轴作为坐标轴，则一个椭圆的方程是对角型的 $(s=0)$。

定理2.20 一个椭球面在一点 x 的主方向是 x 的中心截线的轴的方向。

推论 对脐点的中心截线是圆。

这个推论容有其逆。假设给定半径 r 的一个中心圆截线，与椭球面同心的半径为 r 的球面沿给定圆切于椭球面；从此，其中一条轴必为球面的直径。在我们的假定下，或者 $r=a^2$，或者 $r=0$。沿这个圆，$\sum\frac{(x^i)^2}{(a^i)^2}=r^{-2}\sum(x^i)^2$。截线是圆的两个直径平面

的方程是

$$(x^1)^2\frac{(a^1)^2-(a^2)^2}{(a^1)^2(a^2)^2}=(x^3)^2\ \frac{(a^2)^2-(a^3)^2}{(a^2)^2(a^3)^2}.$$

我们容易验证，平面的法线是椭球面在脐点（3.49）处的法线。

（4）Jachimsthal，Dupin，Liouville 定理　两曲面的角定义为它们在交点的法线的交角。

定理2.21（Jachimsthal）　如果两曲面的交线为这两曲面的曲率线，则这两曲面沿交线构成定角。

如果两曲面交于定角，且交线为其中一曲面的曲率线，则这交线也是另一曲面的曲率线。

证　若 c 为两曲面 p 和 q 上的曲率线，则由 Rodrigues 公式：

$$d\mathsf{N}_p+\lambda d\mathsf{c}=d\mathsf{N}_q+\lambda^* d\mathsf{c}=0,$$

从此对两曲面的交角 φ 推出

$$d\cos\varphi=d(\mathsf{N}_p\cdot\mathsf{N}_q)=-\lambda d\mathsf{c}\cdot\mathsf{N}_q-\lambda^*\mathsf{N}_p\cdot d\mathsf{c}=0.$$

反之，若 $d(\mathsf{N}_p\cdot\mathsf{N}_q)=0$ 和 c 是 p 的曲率线，则由 Rodrigues 公式

$$d\mathsf{N}_p\cdot\mathsf{N}_q=-\lambda d\mathsf{c}\cdot\mathsf{N}_q=0,$$

于是由假设 $\mathsf{N}_p\cdot d\mathsf{N}_q=0$。这表明，在 c 的任一点处，$d\mathsf{N}_q\in T_p(\mathsf{c})$。我们知道，又有 $d\mathsf{N}_q\in T_q(\mathsf{c})$。切面 T_p 和 T_q 的交线是沿 c 的切线方向 $d\mathsf{c}$ 的直线，除非 $\varphi=0$。若 $\varphi\neq0$，则这个论证表明了 $d\mathsf{N}_q+\lambda^* d\mathsf{c}=0$；$\mathsf{c}$ 是在 q 上的曲率线。若 $\varphi=0$，则沿 c，$\mathsf{N}_p=\mathsf{N}_q$，$d\mathsf{N}_q+\lambda d\mathsf{c}=0$。

证毕

定义　一个 C^r 映射 $F(u^1,\ u^2;\ \sigma)$：$E^3\to E^3$ 是一族曲面，如果对 σ_0 的每个值 $F(u^1,\ u^2;\ \sigma_0)$ 是一曲面。设在 E^3 中有一区域，在这个区域中

$$F_1(u^1, u^2; \sigma^1)=F_2(v^1, v^2; \sigma^2)$$
$$=F_3(w^1, w^2; \sigma^3)=\mathbf{x}$$

对每点 x 有唯一的解，并若 $\mathbf{N}_i(x)\cdot\mathbf{N}_j(x)=\delta_{ij}$ （$\mathbf{N}_i$ 为过 x 的曲面法线），则称三族曲 面 $F_i(u^1, u^2; \sigma^i)$ 为三重正交的。

通过所考虑的区域中每个给定点有三重正交曲面族中每一族的一个曲面，与x相关联的值 $(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ 可以作为这个区域中的坐标。

例 假设$a^1>a^2>a^3$。Bolzano定理表明，方程

$$\frac{(x^1)^2}{\sigma-a^1}+\frac{(x^2)^2}{\sigma-a^2}+\frac{(x^3)^2}{\sigma-a^3}=1 \tag{3.52}$$

对任一不在坐标平面上的给定点 $(x^i)\in E_3$有三个实根 $\sigma^1>a^1>\sigma^2>a^2>\sigma^3>a^3$。这样确定的三族二次曲面是三重正交 的。设 $\mathbf{N}_i$ 是沿方向 $\mathbf{v}_i=(x^j(\sigma^i-a^j))$ 的单位向量，于是

$$\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_k=\sum_{j=1}^{3}\frac{(x^j)^2}{(\sigma^i-a^j)(\sigma^k-a^j)}$$
$$=\frac{1}{\sigma^k-\sigma^i}\sum_j\left[\frac{(x^j)^2}{\sigma^i-a^j}-\frac{(x^j)^2}{a^k-a^j}\right]=0.$$

F_1是一族椭球面，F_2是一族单叶双曲面，F_3是一族双叶双曲面。

定理2.22 （Dupin） 一个三重正交曲面族交于曲率线。

一曲线当且只当它的相对挠率为零时才是曲率线。由方程(3.30)，互相正交的曲线有相反的相对挠率，$\tau_r(\varphi)+\tau_r\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=0$。令$\tau_i$为在曲线$\sigma^j=\text{const}$，$j\neq i$ 的相对挠率。这些是三重正交曲面族的交线；它们是成对地落在一曲面上的互相正交的曲线。从此 $\tau_i+\tau_j=0\,(i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ 3)$，或者$\tau_i=0\,(i=1,\ 2,\ 3)$。

作为Dupin定理的一个应用，我们决定E^3中一切共形(保角)变换。

定义 一个C^6变换F：$E^3 \to E^3$叫做是共形（保角）的，如果无定向角是F的不变量.

若对交于$s=s_0$的任两曲线$\mathbf{x}(s)$，$\mathbf{y}(s)$，

$$\cos\varphi = \mathbf{x}'(s_0)\cdot\mathbf{y}'(s_0) = \frac{F'(\mathbf{x}(s_0))\cdot F'(\mathbf{y}(s_0))}{|F'(\mathbf{x}(s_0))|\cdot|F'(\mathbf{y}(s_0))|},$$

则F是共形的，共形映射的平凡的例子是欧氏运动和位似变换，就是相似变换。

现在我们引用初等几何的一个简单解法来研究共形映射.

一个简单的共形变换（不是相似变换）是**反演**

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}, \tag{3.53}$$

$\mathbf{y}$是在$\mathbf{x}$处的射线上长为$|\mathbf{x}|^{-1}$的向量。单位球面对反演是不变的，一个方程$a\mathbf{x}^2+\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}+c=0$对$a\neq 0$时表示一球面，$a=0$，$\mathbf{b}\neq 0$时，表示一平面。它关于反演的象（至少对$\mathbf{x}\neq 0$的点)是$a+\mathbf{b}\cdot\mathbf{y}+c\mathbf{y}^2=0$。对$c\neq 0$时，这是一个球面，$c=0$，$\mathbf{b}\neq 0$时，是一个平面。特别，过原点的球面（$c=0$）变为平面，反之亦然。给定两条相交曲线$\mathbf{x}_i(s)(i=1, 2)$，它们的象$\mathbf{x}_i(s)/|\mathbf{x}_i(s)|^2$做成的角（对$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1(s_1)=\mathbf{x}_2(s_2)$计算)：

$$\frac{\mathbf{x}^2\mathbf{x}_1'-2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}_1')\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2}\cdot\frac{\mathbf{x}^2-\mathbf{x}_2'-2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}_2')}{\mathbf{x}^2}=\mathbf{x}_1'\cdot\mathbf{x}_2'=\cos\varphi.$$

反演是共形的，是一个**对合的**变换，就是说它的平方是一恒等变换。当$\mathbf{x}=0$或$\mathbf{y}=0$时，方程（3.53）都不能定义任一点$\mathbf{x}\in E^3$的象。但若$|\mathbf{x}|<\varepsilon$，$|\mathbf{y}|>\varepsilon^{-1}$，则自然地引入一个唯一的“无穷远点”作为$\mathbf{x}=0$关于反演的象，一个“$\infty$的邻域”是$E^3$中任一球面的外部。有了这个邻域关系，$E^3+\infty$可以给出$E^4$中三维球面的坐标结构，在$E^4$中取笛氏坐标（$\xi^i$)，则$S^3$是曲面

$$(\xi^1)^2+(\xi^2)^2+(\xi^3)^2+(\xi^4)^2=1.$$

我们用"球极射影"Σ把S^3射影到它的赤道E^3上，通过球面上一点$\xi=(\xi^i)$ 和 "南极" $\delta=(0, 0, 0, -1)$ 的直线是向量集 $a\xi+b\delta$, $a+b=1$. 它与超平面 $\xi^4=0$ 的交集 $\mathrm{x}=\Sigma(\xi)$ 是决定于 $a\xi^4-b=0$, $a+b=1$ 或者$a=(1+\xi^4)^{-1}$. x 是 ξ 的球极射影，

$$x^i=\frac{\xi^i}{1+\xi^4}, \quad i=1, 2, 3. \tag{3.54}$$

这个映射 对 E^3 和 $S^3-\delta$ 中一切点是一对一的。逆映射是

$$\xi^i=\frac{2x^i}{1+\mathrm{x}^2}, \quad i=1, 2, 3, \quad \xi^4=\frac{1-\mathrm{x}^2}{1+\mathrm{x}^2}, \tag{3.55}$$

若ξ接近于δ，则x趋于无穷远。E^3表示为S^3上的一个局部曲面，反演 I： $\mathrm{x}\to\mathrm{x}/|\mathrm{x}|^2$是$E^4$中反射

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

的象，

$$I=\Sigma A\Sigma^{-1}.$$

"无穷远点" 的引入，将E^3中的反演几何化为E^4中S^3上的正交几何，并使I成为一个一对一和可微的变换，E^3中每点可以作为原点，对每点有一个有确定的反演。

定理2.23 (Liouville) S^3中的一切共形变换构成由相似变换和反演生成的一个Lie变换群。

我们要证明：S^3中任一共形变换或者是一个相似变换，或者是一个反演，或者是两者的结合。

一个共形变换M把C^3曲面变到C^3曲面和三重正交曲面族变到三重正交曲面族。由Dupin定理，曲率线映到曲率线；从此脐点变到脐点，并由定理2.18，平面与球面变到平面与球面。M把平

面$x^i=\text{const}$（$i=1, 2, 3$）或者变到一个三重正交平面族或者一个三重正交球面族〔都通过$\mathbf{z}=M(\infty)$〕。在后一情形下，设I为以$\mathbf{z}$为中心的反演，则IM把∞映到自身。从此平面$x^i=\text{const}$映到某一三重正交平面族。这种新平面可由关于新笛氏坐标系$y^i=\text{const}$给出。一条坐标轴$x^i=x^j=0$（$i\neq j$）映到对应轴$y^i=y^j=0$。在第一个情形下这个映射为M，在第二个情形下这个映射为IM，所以有一个解析表示$y^i=y^i(x^i)$。映射把球面$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=\text{const}$变到球面$\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}=\text{const}$；方程$\Sigma x^i dx^i=0$和$\Sigma y^i \dot{y}^i dx^i=0$必同时成立。因为$d\mathbf{x}$可以是正交于$\mathbf{x}$的任一向量，向量$(y^i\dot{y}^i)$必与$(x^i)$线性相关。微分方程

$$y^i\frac{dy^i}{dx^i}=c^2x^i,\quad y^i(0)=0$$

蕴含着$\mathbf{y}=c\mathbf{x}$。所以M或IM是一平移。把x^i坐标的原点变到y^i坐标的原点，接着由平行于x^i轴的一旋转变到y^i轴，接着由此为c的一位似；或者M或者IM是一个相似变换。

（5）渐近曲线　曲率线不是可以作为定义曲面上一个不变标架族的唯一的不变曲线族，至少在双曲曲面上$K<0$不是如此。通过双曲曲面上每点有两条渐近曲线，它们的切线是渐近切线。从方程（3.15）看到，一曲线是渐近曲线（$k_n=0$），当且只当它所对应的标架是作为一条空间曲线的Frenet标架时才可能。对给定的主曲率，从方程$(3.20)_1$代入到$(3.20)_2$我们可以计算渐近方向；从而得到Enneper公式：

$$\tau_r=\sqrt{-K}.$$

让读者证明下列命题：

1° 证明曲面$e^z=\cos y/\cos x$是一极小曲面（Scherk）。

2° 证明一曲面曲线的切线与它的球面象的切线在对应点是平行的一个充分必要条件是该曲线为一曲率线。

3° 平面曲率线的球面象是什么？

4° 旋转曲面的方程可写为

$$x^1 = r(u)\cos v,\quad x^2 = r(u)\sin v,\quad x^3 = \varphi(u),$$

如果作正规化$r'^2+\varphi'^2=1$，式中u变为子午线的弧长，$u=\text{const}$是平行圆；$v=\text{const}$是子午线。固定标架记作$\{\mathbf{i}_i\}$。

（a）证明采用这个正交参数曲线系的标架是

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r'\cos v & r'\sin v & \varphi' \\ -\sin v & \cos v & 0 \\ -\varphi'\cos v & -\varphi'\sin v & r'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{i}_1\\ \mathbf{i}_2\\ \mathbf{i}_3\end{pmatrix}.$$

（b）对标架$\{\mathbf{e}_i\}$计算Cartan矩阵，并证明平行圆和子午线都是曲率线。

（c）证明一旋转曲面是一极小曲面的充要条件是$r''=1$〔应用（b）的结果〕。求对应的极小曲面。

（d）曲面的第一基本形式是$ds^2=du^2+r^2dv^2$。

曲面的形状也依赖于φ。由直接计算检验$K=f(r)$。

8．积分理论．曲面论的基本定理 曲面论的一个基本问题是，寻求一个曲面，它的不变式是给定的，并要证明，除了欧氏运动外，这些不变式决定一个曲面。这些同高维微分几何的一切类似问题一样，都依据一个基本积分定理。下面就要论述这个定理的最一般的情形，然后把它应用到曲面论上来。

假定在变数$u^1,\cdots,u^k$的某凸邻域$U\subset E^k$中给定k个线性无关的线性微分形式ω^α和n^2个线性微分形式ω_i^j（$n\geqslant k$）。希腊指标总是从1到k，罗马指标从1到n。在E^n中给定一个基底$\{\mathring{\mathbf{e}}_i\}$和一个向量$\mathbf{r}_0$，我们要寻求一个子空间$\mathbf{r}: U\to E^n$和一标架族$\{\mathbf{e}_i(\mathbf{u})\}$，使得

$$d\mathbf{r}=\omega^\alpha\mathbf{e}_\alpha,$$

$$d\mathbf{e}_i=\omega_i^j\mathbf{e}_j. \tag{3.56}$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_0)=\mathbf{r}_0,\quad \mathbf{e}_i(\mathbf{u}_0)=\mathring{\mathbf{e}}_i,$$

我们必须证明，在这些条件下，可以找到唯一的映射$\mathbf{r}$，并且$\mathbf{r}$在$\mathbf{u}_0$

的邻域内 Jacobi式的秩为 k。

暂时假定ω^α的系数是$\mathbf{u}\in U$的C^2函数，ω_i^j的系数为u的C^1函数。对于这个问题必须具有两个条件：1°，$\mathring{\mathbf{e}}_\alpha$张成$T_{r_0}$；2°，$d(d\mathbf{r})=d(d\mathbf{e}_i)=0$。所以应当假定在$U$中成立可积条件：

$$
\begin{gathered}
d\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha,\\
\omega^\alpha\wedge\omega_\alpha^j=0,\quad j>k,\\
d\omega_i^j=\omega_i^s\wedge\omega_s^j,
\end{gathered}
\tag{3.57}
$$

在E^n中取$\mathbf{r}_0$作为原点来简化这些公式。在E^n中的固定标准正交标架是$\{\mathbf{i}_i\}$；则$\{\mathring{\mathbf{e}}_i\}=A_0\{\mathbf{i}_i\}$，$|A_0|\neq 0$。对$E^k$中通过$\mathbf{u}_0$的任一可微曲线$\mathbf{c}=\mathbf{c}(s)$，我们把微分$du^\alpha$用其沿c的值$(du^\alpha/ds)ds$来代替。按照一个正规化，取$\mathbf{c}(0)=\mathbf{u}_0$。为了沿c求积分的目的，则可以把线性微分形式$\omega^\alpha=a_\beta^\alpha du^\beta$，$\omega_i^j=b_{i\alpha}^j du^\alpha$写为

$$\omega^\alpha=w^\alpha ds,\quad \omega_i^j=w_i^j ds,$$

式中

$$w^\alpha=a_\beta^\alpha\frac{du^\beta}{ds},\qquad w_i^j=b_{i\beta}^j\frac{du^\beta}{ds}.$$

设$W(s)=(w_i^j(s))$。由定理1.16，矩阵微分方程$X'X^{-1}=W$有唯一的解$X(s)=A_0Y(s)$，使得$Y(0)=U$（U：单位矩阵）。若定义

$$\{\mathbf{e}_i(s)\}=X(s)\{\mathbf{i}_i\},$$

则映射

$$\mathbf{r}(s)=\int_0^s w^\alpha(\sigma)\mathbf{e}_\alpha(\sigma)d\sigma \tag{3.58}$$

为s的一个可微函数。在邻域U中取一点$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}(s_1)$并以$U$中另一曲线$\mathbf{c}^*(s^*)$来连结o和$\mathbf{u}_1=\mathbf{c}(s_1)$。引用与上面同样的过程，得到另一组解$X^*(s^*)$，$\mathbf{r}^*(s^*)$。在c和$\mathbf{c}^*$上可以正规化参数，使得$\mathbf{u}_1=\mathbf{c}(1)=\mathbf{c}^*(1)$（$s$和$s^*$通常不是弧长）。若能证明$\mathbf{r}(1)=\mathbf{r}^*(1)$，就可推出如方程(3.58)所定义的r的计算不依赖于曲线c的选取，

但只依赖于点 $\mathbf{u}\in U$ 的选取．为了证明这个事实，寻求X不只依赖于曲线$\mathbf{c}(s)$ 和$\mathbf{c}^*(s)$，并依赖于整个族

$$\mathbf{c}_t(s)=(1-t)\mathbf{c}(s)+t\mathbf{c}^*(s),\quad 0\leqslant s,\quad t\leqslant 1,\tag{3.59}$$

$\mathbf{c}_t(s)$ 的一切点都在凸区域U内。沿一条曲线$\mathbf{c}_t$，

$$\frac{du^i}{ds}=(1-t)\frac{dc^i}{ds}+t\frac{dc^{*i}}{ds}(\text{因 } t \text{ 固定}),\tag{3.60}$$

这是

$$d\mathbf{c}_t=\left[(1-t)\frac{d\mathbf{c}}{ds}+t\frac{d\mathbf{c}^*}{ds}\right]ds+(\mathbf{c}^*-\mathbf{c})dt\tag{3.61}$$

的一个特殊情形。矩阵

$$W(\mathbf{c}_t(s))=\left(b^j_{i\alpha}(\mathbf{c}_t(s))\left[(1-t)\frac{d\mathbf{c}^\alpha}{ds}+t\frac{d\mathbf{c}^{*\alpha}}{ds}\right]\right)\tag{3.62}$$

是t的一个可微函数，于是矩阵$X(\mathbf{c}_t(s))$是对常数t从$W(\mathbf{c}_t(s))$由求积分而得到的。关于这个证明的第一步要指出

$$\{\mathbf{e}_i(1,\ t)\}=X(\mathbf{c}_t(1))\{\mathbf{i}_i\}=\int_0^1 W(\mathbf{c}_t(\sigma)d\sigma\{\mathbf{e}_i(\sigma,\ t)\}$$

不依赖于t；即标架$\{\mathbf{e}_i(\mathbf{u})\}$不依赖于在它的定义中所采用的曲线$\mathbf{c}$。从 (3.61) 和 (3.62) 推出

$$\omega^j_i=w^j_i ds+b^j_{i\alpha}(\mathbf{c}^{*\alpha}-\mathbf{c}^\alpha)dt.$$

从上列定义，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{e}_i(1,\ t)}{\partial t}=&\int_0^1\frac{\partial b^j_{i\alpha}}{\partial t}[(1-t)\mathbf{c}'+t\mathbf{c}^{*\prime}]^\alpha d\sigma\mathbf{e}_j(\sigma,\ t)\\&+\int_0^1 b^j_{i\alpha}(\mathbf{c}^{*\prime}-\mathbf{c}')^\alpha d\sigma\mathbf{e}_i(\sigma,\ t)\\&+\int_0^1 b^j_{i\alpha}[(1-t)\mathbf{c}'+t\mathbf{c}^{*\prime}]^\alpha d\sigma\frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial t}(\sigma,t).\end{aligned}$$

在$\mathbf{e}_i(1,\ 1)-\mathbf{e}_i(1,0)=\int_0^1(\partial\mathbf{e}_i/dt)\,dt$的积分过程中，把第

二个积分应用积分次序的交换和分部积分法。常数项因为 c(1) $=c^*(1)$ 而等于零，于是推出

$$
\begin{aligned}
&e_i(1,1)-e_i(1,0)\\
&=\int_0^1\int_0^1\left\{\frac{\partial b^j_{i\alpha}}{\partial t}[(1-\tau)c'+\tau c^{*\prime}]^\alpha\right.\\
&\quad\left.-\frac{\partial b^j_{i\alpha}}{\partial s}(c^*-c)^\alpha\right\}e_j d\tau\wedge d\sigma\\
&\quad+\int_0^1\int_0^1\left\{b^j_{i\alpha}[(1-\tau)c'-\tau c^{*\prime}]^\alpha\frac{\partial e_j}{\partial t}\right.\\
&\quad\left.-(c^*-c)^\alpha\frac{\partial e_j}{\partial s}\right\}d\tau\wedge d\sigma\\
&=\int_{I^2}d(\omega^j_i e_j)=0 \quad (\text{由假设}),
\end{aligned}
$$

按同法，若令

$$w^\alpha(s,t)=a^\alpha_\beta(c_i(s))[(1-t)c'+tc^{*\prime}]^\beta,$$

则流形是

$$r(s,t)=\int_0^s w^\alpha(\sigma,t)e_\alpha(\sigma,t)d\sigma.$$

同上面的计算完全一样，我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r(1,t)}{\partial t}&=\int_0^1\frac{\partial a^\alpha_\beta}{\partial t}e_\alpha[(1-t)c'+tc^{*\prime}]^\beta d\sigma\\
&\quad+\int_0^1 a^\alpha_\beta e_\alpha(c^{*\prime}-c')^\beta d\sigma\\
&\quad+\int_0^1 a^\alpha_\beta[(1-t)c'+tc^{*\prime}]^\beta\frac{\partial e_\alpha}{\partial t}d\sigma,
\end{aligned}
$$

由分部积分法，从此推出

$$
\begin{aligned}
r^*(1)-r(1)=r(1,1)-r(1,0)&=\int_0^1\frac{\partial r}{\partial t}(1,\tau)d\tau\\
&=\int_{I^2}d(\omega^\alpha e_\alpha)=0,
\end{aligned}
$$

式中

$$\omega^{\alpha}(s, t)=w^{\alpha}(s, t)ds+a_{\beta}^{\alpha}(c^{*}-c)^{\beta}dt.$$

形式ω^{a}是E^{k*}中一个基底。E^{k}的对偶基底是$\{x_{\alpha}\}$。若一曲线c_{α}在0的切向量是x_{α}，则

$$d\mathrm{r}\left(\frac{dc_{\alpha}}{ds}\right)_{s=\alpha}=\overset{\circ}{e}_{\alpha}.$$

这表明 Jacobi 式 $J_{u}\mathrm{r}$ 在u= 0 的秩是 k。因为这个 Jacobi 式是连续的，所以它在 u= 0 的邻域内的秩是 k。我们证明了下面的定理：

定理2.24 在一个开区域$U\subset E^{k}$中定义的 k 个 C^{1}线性无关的线性微分形式ω^{α}和$n^{2}(n\geqslant k)$个 C^{1}线性微分形式 ω_{i}^{j}，在任何一点 $u_{0}\in U$ 的邻域中决定唯一的子空间 $\mathrm{r}\in E^{n}$ 和唯一的标架族$\{e_{i}\}$，使得

$$\mathrm{r}(u_{0})=\mathrm{r}_{0},\ e_{i}(u_{0})=\overset{\circ}{e}_{i},\ |\overset{\circ}{e}_{i}|\neq 0,$$

$$d\mathrm{r}=\omega^{\alpha}e_{\alpha},\ de_{i}=\omega_{i}^{j}e_{j}$$

的一个充要条件是：

$$d\omega^{\alpha}=\omega^{\beta}\wedge\omega_{\beta}^{\alpha},\ d\omega_{i}^{j}=\omega_{i}^{m}\wedge\omega_{m}^{j}.$$

我们把这个定理应用到关于 E^{3} 中曲面的若干存在性和唯一性定理。

定理2.25 两个变数的微分形式 ω^{1}，ω_{1}^{2}，ω_{1}^{3}，ω_{2}^{3} 除了一个欧氏运动外，决定一个曲面的一个充要条件是$\omega^{1}\wedge\omega^{2}\neq 0$及方程(3.21) 和 (3.22) 成立。

若定义$\omega_{j}^{i}=-\omega_{i}^{j}$，则矩阵$W$属于$\mathscr{L}(O_{3})$。若$A_{0}$是正交的，则$X$是一个正交矩阵；因而标架$\{e_{i}\}$是标准正交的，所以两组不同的初始条件决定的曲面是迭合的。定理2.24在几何上的重要性在于这样的事实，若A_{0}在Lie群G中和 (ω_{i}^{j}) 在$\mathscr{L}(G)$中，则X应在G中。定理2.24蕴涵着对任一Klein 几何中任何类型的子空间

都有与定理2.25相仿的叙述。

这里可以讨论曲面论中可微性的自然条件的问题。曲率、曲率线和Darboux标架可从$d\mathbf{r}$和$d\mathbf{N}$来计算。方程（3.30）表明，连一条曲面曲线的相对挠率都可以从主曲率（即二阶不变量）得到。从此出发，我们可取C^2空间曲线，它们没有Cartan矩阵(2.5)，但只有与$C(A)=(p_i^j)$相关联的标架，其中

$$(p_1^2)^2+(p_1^3)^2=k^2.$$

在曲线论（§2）里已经证明过空间曲线的基本定理：给定任意两个连续函数$k(s)$和$\tau(s)$，$(a\leqslant s\leqslant b)$（除一迭合外）唯一地决定一条$C^3$空间曲线。现在叙述曲面论里的相应定理。

我们提出这样的问题：一个曲面是否由它的两个基本形式（除一迭合外）决定的。这是线性代数的一个古典问题，就是两个二次形式$\mathrm{I}=g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$和$\mathrm{II}=l_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$，其中一个是正定的，可以借一个线性变换$(\pi^\alpha)=(du^\beta)(A_\beta^\alpha)$把它们同时变为对角型：

$$\mathrm{I}=\sum(\pi^\alpha)^2,\quad \mathrm{II}=\sum k_\alpha(\pi^\alpha)^2.$$

主曲率是特征方程$|kg_{\alpha\beta}-l_{\alpha\beta}|=0$的根。若两个基本形式是给定的，则主曲率和形式$\pi^\alpha$可用一代数方法而得到。

对角化第一基本形式的形式ω^α是T_p^*的一个基底，所以定义在曲面上一个函数f的微分可写为

$$df=f_{/1}\omega^1+f_{/2}\omega^2. \tag{3.63}$$

函数$f_{/\alpha}$叫做f关于标架$\{e_i\}$（它属于ω^α）的**协变导数**。若标架是不变的，则$f_{/\alpha}$叫做在$\mathbf{r}$上的**不变导数**。以后只用到关于曲面上Darboux标架的不变导数。

在Darboux标架的情形下，采用主曲率k_1，k_2的方向为$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$（见第2段），这时

$$d\mathbf{r}=\pi^1\mathbf{a}_1+\pi^2\mathbf{a}_2,$$

可是$\mathbf{a}_1$的方向决定于$\pi^2=0$，而$\mathbf{a}_2$的方向决定于$\pi^1=0$。所以在

采用Darboux标架时，曲率线的微分方程是

$$\pi^1\pi^2=0.$$

由 (3.28)，在曲面的各点所对应标架的Frenet 方程是

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}_1&=\pi_1^2\mathbf{a}_2+k_1\pi^1\mathbf{a}_3,\\ d\mathbf{a}_2&=-\pi_1^2\mathbf{a}_1+k_2\pi^2\mathbf{a}_3,\\ d\mathbf{a}_3&=-k_1\pi^1\mathbf{a}_1-k_2\pi^2\mathbf{a}_2. \end{aligned} \tag{3.28$'$}$$

这样，采用Darboux 标架时，π_1^2，π^1，π^2都是以u^1，u^2的函数为系数、关于du^1，du^2的Pfaff形式。因而，只要注意到π^1，π^2是独立的，就可写出

$$\pi_1^2=\rho_1\pi^1+\rho_2\pi^2. \tag{3.64}$$

现在要给出ρ_1，ρ_2的几何意义。

当点r沿曲率线$\pi^2=0$的方向移动时，就有

$$d\mathbf{r}=\pi^1\mathbf{a}_1,$$

$$d\mathbf{a}_1=\rho_1\pi^1\mathbf{a}_2+k_1\pi^1\mathbf{a}_3.$$

因为沿曲率线$\pi^2=0$，$ds^2=(\pi^1)^2$，$\dfrac{d\mathbf{a}_1}{\pi^1}$是它的曲率向量．从而，按照

$$\frac{d\mathbf{a}_1}{\pi^1}=\rho_1\mathbf{a}_2+k_1\mathbf{a}_3,$$

可知ρ_1是曲率线$\pi^2=0$的测地曲率。同样ρ_2是曲率线$\pi^1=0$的测地曲率。

在Darboux标架的情形下，(3.63) 可改写为

$$df=f_{/1}\pi^1+f_{/2}\pi^2, \tag{3.64$'$}$$

沿曲率线$\pi^2=0$，π^1是它的弧长，并有

$$\frac{df}{\pi^1}=f_{/1},$$

又沿曲率线$\pi^1=0$，π^2是弧长，并有

$$\frac{df}{\pi^2}=f_{/2}.$$

由此可见，$f_{/1}$，$f_{/2}$是沿曲率线表达函数f的变化率。

若f是r上的不变函数，则不变导数也是不变函数。我们由下式来定义关于主曲率的四个新的不变量$k_{\alpha,\beta}$：

$$dk_\alpha=k_{\alpha,1}\pi^1+k_{\alpha,2}\pi^2. \tag{3.65}$$

按照（3.64），方程（3.21）（把其中ω改为π）可改写为

$$d\pi^1=\rho_1\pi^1\wedge\pi^2,\ \ d\pi^2=\rho_2\pi^1\wedge\pi^2. \tag{3.66}$$

从此，可以计算ρ_1，ρ_2。

此外，由于已知

$$\pi_1^3=k_1\pi^1,\ \ \pi_2^3=k_2\pi^2,$$

再利用（3.65），Gauss-Codazzi方程（3.22）(把其中ω改为π）可改写为ρ_1，ρ_2与k_1，k_2之间的关系式：

$$\rho_{1,2}-\rho_{2,1}=k_1k_2+\rho_1^2+\rho_2^2, \tag{3.67}$$

$$\left.\begin{aligned}k_{1,2}&=\rho_1(k_1-k_2),\\ k_{2,1}&=\rho_2(k_1-k_2).\end{aligned}\right\} \tag{3.68}$$

方程（3.67）是Egregium定理；由于它阐明了如何从ρ_α来计算总曲率，而ρ_α只与第一基本形式有关（见（3.66)）。现在可以把定理2.25改变为：

定理2.26 一个正定二次形式Ⅰ和一个二次形式Ⅱ是一个曲面（除迭合外是唯一的）的基本形式的一个充要条件是方程（3.67）和（3.68）成立。

一个重要应用如下：如果只Ⅰ是给定的，则ρ_α与总曲率可从方程（3.66）和（3.67）计算，如果某些Pfaff形式ω^α〔$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$〕换为不变形式$\pi^\alpha$。若从方程（3.68），由$k_2=K/k_1$消去$k_2$，则第二基本形式可以从$dk_1=k_{1,1}\pi^1+k_{1,2}\pi^2$得到。由构造，

可积条件是满足的；I 总是某曲面的度量。故有

定理2.27 关于两个变数的一个C^2正定二次形式总是某曲面的 I。

这个结果阐述了曲面论与 $E^n(n>3)$ 中超曲面论之间的分歧。因为我们可以证明：一个超曲面的 $g_{\alpha\beta}$ 必须满足一组依赖于第二基本形式的偏微分方程。（见本节第 6 段末。）

例 1 G. Monge（微分几何创始人之一）曾经广泛地研究过一个类型的曲面，就是由

$$\rho_1\rho_2=0$$

所确定的所谓“陶形曲面”（样板曲面）。若 $\rho_1=\rho_2=0$，则由 (3.64) 可知$\pi_1^2=0$，这种曲面是平面和正圆柱面（见 5.B）。若 $\rho_1=0$ 和$\rho_2\neq 0$，则由 (3.28) 可知曲率线$\pi^2=0$，可从Frenet 方程

$$d\{\mathbf{a}_i\}=\begin{pmatrix}0 & 0 & k_1\pi^1\\ 0 & 0 & 0\\ -k_1\pi^1 & 0 & 0\end{pmatrix}\{\mathbf{a}_i\}$$

求积分而得到。它是在曲面的一个法面上的一条平面曲线；陶形曲面是正交于一个单参数平面族。

例 2 为了以后的应用，我们将寻求总曲率$K=-1$的曲面关于渐近参数曲线的ds^2。首先，给出关于曲率线参数的曲面。

$$ds^2=E(ds^1)^2+G(ds^2)^2.$$

因为$\pi^1=E^{1/2}ds^1$，$\pi^2=G^{1/2}ds^2$，所以一个函数 f 的不变导数是

$$f_{/1}=E^{-1/2}\frac{\partial f}{\partial s^1},\quad f_{/2}=G^{-1/2}\frac{\partial f}{\partial s^2}.$$

由假定，我们可以令 $k_1=\mathrm{ctg}\sigma$和$k_2=-\mathrm{tg}\sigma$。从 (3.66)，我们有

$$\rho_1=-\frac{1}{2}E^{-1}G^{-1/2}\frac{\partial E}{\partial s^2},\quad \rho_2=-\frac{1}{2}G^{-1}E^{-1/2}\frac{\partial G}{\partial s^1}.$$

((因由外微分：$d\pi^1=\frac{1}{2}E^{-1/2}\left(\frac{\partial E}{\partial s^1}ds^1+\frac{\partial E}{\partial s^2}ds^2\right)\wedge ds^1$
$=\frac{1}{2}E^{-1/2}\frac{\partial E}{\partial s^2}ds^2\wedge ds^1$，$d\pi^2=\frac{1}{2}G^{-1/2}\left(\frac{\partial G}{\partial s^1}ds^1+\frac{\partial G}{\partial s^2}ds^2\right)$
$\wedge ds^2=\frac{1}{2}G^{-1/2}\frac{\partial G}{\partial s^1}ds^1\wedge ds^2$。)方程（3.68）变为

$$E^{-1}\frac{\partial E}{\partial s^2}=2\text{ctg}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial s^2},\quad G^{-1}\frac{\partial G}{\partial s^1}=-2\text{tg}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial s^1}.$$

这两个方程仅包含一个变数的导数；它们是容易积分的；并给出$\log E=2\log|\sin\sigma|+\log f(s^1)$，$\log G=2\log|\cos\sigma|+\log g(s^2)$。在曲率线上变更尺度：$du^1=f(s^1)^{1/2}ds^1$，$du^2=g(s^2)^{1/2}ds^2$，则第一基本形式变为

$$ds^2=\sin^2\sigma(du^1)^2+\cos^2\sigma(du^2)^2. \tag{3.69}$$

取曲率线为参数曲线，则第二基本形式是$\mathrm{I\!I}=l_{11}(du^1)^2+l_{22}(du^2)^2=k_1(\pi^1)^2+k_2(\pi^2)^2$；从此$l_{11}=k_1E=\sin\sigma\cos\sigma$和$l_{22}=k_2G=-\sin\sigma\cos\sigma$。现在可写

$$\mathrm{I\!I}=\sin\sigma\cos\sigma(du^1+du^2)(du^1-du^2). \tag{3.70}$$

用$u^1=q^1-q^2$，$u^2=q^1+q^2$来定义新参数q^α，则曲线q^α为曲面上的渐近曲线。关于新参数

$$ds^2=(dq^1)^2+2\cos2\sigma dq^1dq^2+(dq^2)^2, \tag{3.71}$$

$E=G=1$的参数曲线系是一Чебышев网。q^α自然是Чебышев网的曲线弧长。2σ是曲面上任一点的渐近曲线的交角。它从Gauss方程（3.67）可以计算。这个方程关于曲率线参数u^α是

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial(u^2)^2}-\frac{\partial^2\sigma}{\partial(u^1)^2}=\sin\sigma\cos\sigma, \tag{3.72}$$

这通称为Sine-Gordan方程。Gauss方程(3.67)关于渐近曲线参数q^α是

$$\frac{\partial^2(2\sigma)}{\partial q^1\partial q^2}=\sin2\sigma. \tag{3.73}$$

下列命题让读者证明：

1° 一个球面的线素是 $ds^2=d\varphi^2+\cos^2\varphi d\theta^2$. 存在这样的曲面（局部的），它们与球面成等距对应，并以 φ 和 θ 为曲率线参数，又具有主曲率

$$k_1=(1-c^2\cos^2\varphi)^{-1/2},\ k_2=(1-c^2\cos^2\varphi)^{1/2}.$$

证明这个叙述，并求 E^3 中这样一个曲面的坐标.（应用前段第4°题。）

2° 若 $k_1=k_1(u^1)$, $k_2=k_2(u^2)$, 证明 k_1, k_2, , ρ_1, ρ_2不能决定唯一的曲面.

3° 若一个曲面的主曲率之间存在一个关系 $f(k_1, k_2)=0$, 则称为*W*曲面. 这时可导入一个辅助变数 h, 并表达主曲率为 $k_1=F(h)$, $k_2=F(h)\cdot[F(h)-hF'(h)]$.

(a) 证明，关于曲率线参数，

$$ds^2=h^{-2}(ds^1)^2+F'(h)^{-2}(ds^2)^2.$$

(b) 求出对$K=\text{const}$和对$H=\text{const}$的曲面F(Dini).

4° 证明具有平均曲率为常数和平面曲率线的一曲面是一个旋转曲面（Dini).

5° 证明螺旋面是W曲面（Beltrami).

6° 证明$K=-1$ 的曲面的面积元素是 $\alpha=\sin 2\sigma dq^1\wedge dq^2$.

9. 曲面的等距映射 在第2段末，我们已经讲过两曲面p，q是等距的定义，就是若 $ds_p^2(u^1, u^2)=ds_q^2(u^1, u^2)$, 则称两曲面p，q是*等距的*.

现在对等距映射作进一步的讨论.

给定两个曲面p，q与p到q的一个微分同胚F. 要寻求在F之下，使它们的线素保留不变：

$$ds^2(\mathfrak{p},\ d\mathfrak{p})=ds^2(F\mathfrak{p},\ dF\mathfrak{p})$$

的充要条件.

容易知道，若映射是等距的，则有属于q上某标架的形式 ω_q^a, 使得

$$\omega_p^\alpha(\mathrm{p},\ d\mathrm{p})=\omega_q^\alpha(F\mathrm{p},\ dF\mathrm{p}).$$

由此

$$d\omega_p^1-d\omega_q^1=-\omega_p^2\wedge\omega_{p1}^2+\omega_q^2\wedge\omega_{q1}^2=-\omega_p^1\wedge(\omega_{p1}^2-\omega_{q1}^2)=0,$$

$$d\omega_p^2-d\omega_q^2=\omega_p^1\wedge\omega_{p1}^2-\omega_q^1\wedge\omega_{q1}^2=\omega_p^1\wedge(\omega_{p1}^2-\omega_{q1}^2)=0,$$

或者由定理1.3,

$$\omega_{p1}^2(\mathrm{p},\ d\mathrm{p})=\omega_{q1}^2(F\mathrm{p},\ dF\mathrm{p}).$$

并又有（见（3.33））

$$d\omega_{p1}^2=-K_p\omega_p^1\wedge\omega_p^2=d\omega_{q1}^2=-K_q\omega_q^1\wedge\omega_q^2,$$

即

$$K_p(\mathrm{p})=K_q(F\mathrm{p}).$$

关于在p上一曲线的标架，$\omega_{p1}^2=k_g ds$。由假设，ds关于这个映射是不变的。由此一曲线与它关于等距映射之下的象，在对应点的测地曲率必相等。故得

定理2.28 （Gauss）曲线的测地曲率与曲面的总曲率是曲面的等距不变量。

对总曲率来说，这就是定理2.13。

下面要求出两曲面互为等距的充要条件。为此，把它分为几个不同情形。

I．K不是常数的情形

$K=\mathrm{const}$ 定义两曲面中每个曲面上一族曲线。这些曲线在映射F下相互为象。在每点，令 $\mathbf{c}_2$ 为切于$K=\mathrm{const}$ 的单位切向量，$\mathbf{c}_1$ 为该曲线在切面上的法向量，$\mathbf{c}_3$ 为单位法向量$-\mathbf{N}$。这样$\{\mathbf{c}_i\}$是两曲面中每个曲面上的不变标架族，并在映射F下，这些标架是相互对应的。它们在K为相对极值时是不能定义的。微分形式 ω^α 的对应值记为 γ^α，则可写 $d\mathrm{p}=\gamma_p^1\mathbf{c}_{p1}+\gamma_p^2\mathbf{c}_{p2}$。上面的结果变为

$$\gamma_p^\alpha=\gamma_q^\alpha,\quad \gamma_{p1}^2=\gamma_{q1}^2. \tag{3.74}$$

关于这个新标架的不变导致用半支点来记：

$df=f_{;1}\gamma^1+f_{;2}\gamma^2$。由标架的构造，$K_{p;2}=K_{q;2}=0$；从 $dK=K_{p;1}\gamma^1_p=K_{q;1}\gamma^1_q$ 推出

$$K_{p;1}=K_{q;1}。\tag{3.75}$$

这里有两个可能的情形：

A．Jacobi 式 $|Ju(K_p,\ K_{p;1})|\neq 0$。这时，$K_p$ 和 $K_{p;1}$ 是 u^1 和 u^2 的独立函数，因此，K_p 和 $K_{p;1}$ 可以取作 p 和 q 的新坐标，以代替 u^1 和 u^2。为了方便，把指标 p 去掉。$K=\text{const}$ 是参数曲线 $\gamma^1=0$；$K_{;1}=\text{const}$ 是曲线 $\gamma^2=0$，则在映射 F 之下的对应点具有相同的坐标（K，$K_{;1}$）的点。条件（3.75）不足以保证 F 是一等距映射，从 $dK_{;1}=K_{;1;1}\gamma^1+K_{;1;2}\gamma^2$ 推出另外两个条件

$$K_{p;1;1}=K_{q;1;1},\ K_{p;1;2}=K_{q;1;2}。\tag{3.76}$$

条件（3.75）和（3.76）与定理 2.30 合并起来就足以使 F 为一等距映射。由于 $K_{;2}=0$，所以 γ^1 可从 $dK=K_{;1}\gamma^1$ 计算，然后从

$$dK_{;1}=K_{;1;1}\gamma^1+K_{;1;2}\gamma^2$$

来计算 γ^2。由标架的构造，$\gamma^\alpha_p=\gamma^\alpha_q$；即 $ds^2(\mathrm{p},\ d\mathrm{p})=ds^2(\mathrm{q},\ d\mathrm{q})$。

B．Jacobi 式 $|Ju(K,\ K_{;1})|=0$。这时，两个函数 K 和 $K_{;1}$ 不是独立的，故可写为

$$K_{;1}=f(K),$$

这时不能采用它们作为坐标。由于 $dK=K_{;1}\gamma^1$，所以得出

$$\gamma^1=\frac{dK}{f(K)}。$$

在 $\gamma^2_1=\rho_1\gamma^1+\rho_2\gamma^2$ 中的函数 ρ_1 也可以计算如下。从 $d(dK)=d(f(K)\gamma^1)=d(K_{;1}\gamma^1)=K_{;1;2}\gamma^2\wedge\gamma^1+K_{;1}d\gamma^1=K_{;1;2}\gamma^2\wedge\gamma^1+$

$K_{;1}(-\gamma^2\wedge\gamma_1^2)=(K_{;1;2}-K_{;1}\rho_1)\gamma^2\wedge\gamma^1=0$ 推出

$$\gamma_1^2=\frac{K_{;1;2}}{K_{;1}}\gamma^1+\rho_2\gamma^2,$$

ρ_2是一个不变函数，它可以不依赖于K。

1）$|Ju(K,\ \rho_2)|\neq 0$。这时K和ρ_2是独立的，所以在p和q上都可取K和ρ_2作为新坐标。象情形A那样，它们确定具有相同坐标的点的唯一的映射F。映射是等距的，当且只当（见(3.75)(3.76)）

$$\rho_{p2}=\rho_{q2},\quad \rho_{p2;1}=\rho_{q2;1},\quad \rho_{p2;2}=\rho_{q2;2}. \tag{3.77}$$

2）$|Ju(K,\ \rho_2)|=0$。这时ρ_2是K的函数，记作$\rho_2=g(K)$。在参数曲线$\gamma^2=0$上，我们可取K作为参数；这相当于一个参数化，使$f(K)=K_{;1}=1$。由假定，在p上某一邻域中$\rho_{p2}=g_2(K_p)$；即$d\gamma_p^2=g(K_p)dK_p\wedge\gamma_p^2$。（见(3.21)′与上面$\gamma_1^2$的表达式。）若令

$$\log G(K_p)=-\int_{K_0}^{K}g(K)dK,$$

则$d(G(K_p)\gamma_p^2=0$。（因$dG(K_p\gamma_p^2)=dG(K_p)\wedge\gamma_p^2+G(K_p)d\gamma_p^2=\frac{\partial G}{\partial K_p}dK_p\wedge\gamma_p^2+G(K_p)g(K_p)dK_p\wedge\gamma_p^2$。）又按定义：$\frac{dG}{dK_p}=G(K_p)(-g(K_p))$。于是存在一个函数$u$使得

$$du=G(K_p)\gamma_p^2.$$

K和u可取作两曲面的参数。度量变为

$$ds^2=dK^2+\frac{1}{G(K)^2}du^2.$$

当且只当

$$G(K_p)=G(K_q) \tag{3.78}$$

时，两曲面是等距的。

若 $G'(K)^2+\varphi'(K)^2=1$，则曲面与旋转曲面$(G(K)\cos u, G(K)\sin u, \varphi(K))$是等距的。这样一个曲面映到它自身上容有一个单参数等距映射族，就是旋转$(K, u)\to(K, u+c)$。

Ⅱ. K是常数的情形。K为常数的曲面称为常曲率曲面。现在要证明

定理2.29 两个常曲率曲面是等距的一个充要条件是这两个曲面的总曲率相等。

必要性已经证明（定理2.28），现在要证明充分性：

设在p和q上的坐标分别是(u^α)和(v^α)，在每个曲面上给定了标准正交标架。关于这些标架的Pfaff形式是$\omega_p^\alpha(u^1, u^2)$和$\omega_q^\alpha(v^1, v^2)$。在q上把给定的原标架旋转一个角度$\theta(v^1, v^2)$，关于这个新标架的形式记作$\omega_q^\alpha(v^1, v^2, \theta)$。我们可以求出一个映射$v^\alpha=v^\alpha(u^1, u^2)$，使得一已知点$p_0$映到一已知点$q_0$(初始条件）和

$$\begin{aligned}
&\omega_p^1(u^1, u^2, du^1, du^2)-\omega_q^1(v^1, v^2, \theta, dv^1, dv^2, d\theta)=0,\\
&\omega_p^2(u^1, u^2, du^1, du^2)-\omega_q^2(v^1, v^2, \theta, dv^1, dv^2, d\theta)=0,\\
&\omega_{p1}^2(u^1, u^2, du^1, du^2)-\omega_{q1}^2(v^1, v^2, \theta, dv^1, dv^2, d\theta)=0.
\end{aligned}\tag{3.79}$$

这个结果蕴涵着一个可迁等距变换群作用在任一常曲率曲面上，使p=q。因为θ是可以预先指定的，所以群也可迁地作用在切面的向量上。参数的数目至少是三。所有这些结果是纯粹局部的。

为了证明有关方程组（3.79）的论断，先把定理1.8改写为如下的形式：

Frobenius定理 方程组

$$\omega^\alpha=a_i^\alpha(x^1, \cdots, x^n)dx^i=0 \qquad (\alpha=1,\cdots,n-k;\ i=1,\cdots,n)\tag{3.80}$$

（式中 a_j^α 为 C^1 函数）是完全可积的充要条件是存在 Pfaff 形式 $\omega_\beta^\alpha(x^1, \cdots, x^n, dx^1, \cdots, dx^n)$，使得外微分 $d\omega^\alpha$ 可写成如下的形式：

$$d\omega^\alpha=\omega_\beta^\alpha\wedge\omega^\beta. \tag{3.81}$$

这是定理 2.24 的一个推广。为了把定理 1.18 改为上述形式的过程，还有必要作下列两点说明：

1）先把条件（1.5.54）改写为

$$d\omega^\alpha\wedge\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^{n-k}=0\ (\alpha=1, \cdots, n-k). \tag{1.5.54}$$

现在来证明这个条件与条件（3.81）是等价的。

由（3.81）推出（1.5.54）是显然的。只要证明其逆，设 $\omega^{n-k+1}, \cdots, \omega^n$ 是这样的 k 个线性形式，使 $\omega^1, \cdots, \omega^n$ 构成一切线性形式的一个基底，我们写

$$d\omega^\alpha=f_{lm}^\alpha\omega^l\wedge\omega^m \qquad (l<m),$$

因为 $d\omega^\alpha\wedge\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^{n-k}=0$，所以我们有

$$f_{lm}^\alpha\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^{n-k}\omega^l\wedge\omega^m=0 \qquad (\alpha<l<m),$$

由此，当 $n-k<l<m$ 时，

$$d\omega^\alpha=(-f_{lm}^\alpha\omega^m)\wedge\omega^l \qquad (l=1, \cdots, n-k,\ m=l+1, \cdots, n),$$

因括号中是线性形式的线性组合，所以仍是一个线性形式，把 l 改为 β，并令 $-f_{lm}^\alpha\omega^m=\omega_\beta^\alpha$，则上式就是（3.81）。

2）把（1.5.69）中的 j 改为 α，A，C 改为 i，$j=1, \cdots, n$，则（1.5.68）就是（3.80）。

现在来阐明有关方程组（3.79）的结论是 Frobenius 定理的一个直接推论。

在方程组（3.79）的情形中，令

$$\sigma^\alpha=\omega_p^\alpha-\omega_q^\alpha,\ \sigma_1^2=\omega_{p1}^2-\omega_{q1}^2,$$

由假设，

$$d\sigma^1=\omega_{q1}^2\wedge\sigma^2-\omega_p^2\wedge\sigma_1^2,$$

$$d\sigma^2=\omega_{q1}^2\wedge\sigma^1+\omega_p^1\wedge\sigma_1^2,$$

$$d\sigma_1^2=(K\omega_q^2)\wedge\sigma^1-(K\omega_p^1)\wedge\sigma^2.$$

由 Erobenius 定理可知，关于五个变数 u^1，u^2，v^1，v^2，θ 的三个方程的组（3.79）是完全可积的，所以对给定的初始条件可以求出（v^1，v^2，θ）作为（u^1，u^2）的一个函数。

下列命题让读者证明：

1° 第一基本形式为 $ds^2=g(v^1,\ v^2)[(dv^1)^2+(dv^2)^2]$，则称 v^1，v^2 为曲面的等温参数。证明：一个 C^3 曲面总有等温参数。

2° 证明 F 为共形映射的条件是：

$$(\omega_p^1)^2+(\omega_p^2)^2=C(u^1,\ u^2)[(\omega_p^1)^2+(\omega_q^2)^2],$$

应用 1° 证明任一 C^3 曲面是与平面共形的。

3° 如果

$$(\omega_q^1,\ \omega_q^2)=(\omega_p^1,\ \omega_p^2)\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\ ad-bc=1,$$

则称映射是等面积的，验证这个方程，并证明任一曲面都有等面积映射映入平面。

§2.4. 直纹面与直线汇

本节里所描述的方法是以 Study 与 Blaschke 的工作为基础的。基本想法是以点代替直线，把所论的直线的轨迹表示到球面上由点构成的轨迹。

1. 直纹面 E^3 中单参数直线的轨迹称为直纹面，这些直线称为它的母线。例如螺旋面、单叶双曲面、双曲抛物面等都是特殊类型的直纹面。

我们引入一个满足条件

$$\tau^2 = 0 \tag{4.1}$$

的不定数 τ，若 a 和 b 是实数，则称 $A = a + \tau b$ 为一个对偶数。把对偶数考虑作服从定义关系式 $\tau^2 = 0$ 的 τ 的多项式，这意味着两个对偶数 A 和 $A^* = a^* + \tau b^*$ 的和与积可定义如下：

$$\begin{aligned} A + A^* &= (a + a^*) + \tau(b + b^*), \\ A \cdot A^* &= aa^* + \tau(ab^* + a^*b). \end{aligned} \tag{4.2}$$

对偶数的全体构成一个代数，不是一个域。"纯对偶"数 τb 是零因子，因为 $(\tau b)(\tau b^*) = 0$。在代数中的纯对偶数 τb 没有它的逆，即不能做除数。因为，如果令

$$A \cdot X = A^* \qquad (X = x + \tau y), \tag{4.3}$$

则由乘法的定义，得

$$ax = a^*, \quad ay + bx = b^*,$$

然而第一式限于 $a \neq 0$ 时始可解 x，即当 A 的实部分 $\neq 0$ 时，

$$X = \frac{A^*}{A}$$

才有意义，换言之，纯对偶数 τb 不能做除数。

在 E^3 中，一条有向直线可以由它的两点 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 来决定，令

$$\mathbf{a} = \rho(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \bar{\mathbf{a}} = \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{y}), \tag{4.4}$$

式中 ρ 为不等于零的常数。

$\mathbf{a}$ 和 $\bar{\mathbf{a}}$ 的六个分量 a_i, $\bar{a}_i$ ($i = 1, 2, 3$) 称为直线的Plücker齐次直线坐标，除了一个比例因子外是确定的。两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\bar{\mathbf{a}}$ 不是独立的，因为从 (4.3)：

$$\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}} = 0, \tag{4.5}$$

这称为 Plücker 恒等式。因为 ρ 是任意的，我们可取适当的 ρ，使

$$|\mathbf{a}| = 1. \tag{4.6}$$

单位向量 a 是直线的方向余弦；它不依赖于点 x 和 y 的选择。对直线上任意两点，

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|\mathbf{a},$$

由于两向量 m，n 线性相关（即平行）的充要条件是 $\mathbf{m} \times \mathbf{n} = 0$，从此，对直线上任一点 y，有

$$\mathbf{y} \times \mathbf{a} = (\mathbf{x} + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|\mathbf{a}) \times \mathbf{a} = \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}};$$

反之，若 $\mathbf{z} \times \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}$，则 $\mathbf{z} - \mathbf{x}$ 平行于 a 的方向，所以 $\mathbf{z} = \mathbf{x} \pm |\mathbf{z} - \mathbf{x}|\mathbf{a}$ 在这条直线上。总之，一点 z 在向量 $\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}$ 的直线上的充要条件是

$$\mathbf{z} \times \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}. \tag{4.7}$$

在 E^3 中的有向直线集合与 E^3 中服从两个条件 (4.5)，(4.6) 的向量偶是成一一对应的，于是我们可以期望把它表示为 E^6 中的某一四维集合。Study 取对偶数的三元组的空间 D^3 来代替实数的六元组：

$$X_1 = x_1 + \tau\bar{x}_1,\quad X_2 = x_2 + \tau\bar{x}_2,\quad X_3 = x_3 + \tau\bar{x}_3.$$

在 E^3 中每条直线用 D^3 中的对偶向量

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \tau\bar{\mathbf{a}} \tag{4.8}$$

来表示。因为 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1$，$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = 0$，并把向量的数量积的定义形式上变到对偶空间中，则 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\tau\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}} = 1$。所以A是一对偶单位向量。故得

定理2.30 在 E^3 中有向直线与 D^3 中对偶单位球面 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = 1$ 上点构成一一对应。这称为 Study 的推移原理。

两直线 $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \tau\bar{\mathbf{a}}$，$\mathbf{B} = \mathbf{b} + \tau\bar{\mathbf{b}}$ 的数量积是 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \tau(\bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b}$

$+a\bar{b}$)，因为 a 和 b 都是单位向量；所以 $a\cdot b$ 为两直线的夹角 φ 的余弦，此为 $A\cdot B$ 的实部分的几何意义。现在考察 $A\cdot B$ 的对偶部分的几何意义：在空间中两条不相交的直线有一条公垂线（图 2.21），令它与 A 和 B 分别交于 x 和 x^*。若 A 和 B 相交，则取交点为 $x=x^*$，若两直线平行，则 x 和 x^* 可以取在任一公垂线上一对点。不管在那种情形下，两直线的距离 p 是定义为从 x^* 到 x。利用方程（4.4）计算数量积，我们在 A 上取点 $y=x+a$，在 B 上取点 $y^*=x^*+b$，则

$$
\begin{aligned}
a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b &= (a,\ x^*,\ y^*)+(x,\ y,\ b)\\
&= -(a,\ b,\ x^*)+(a,\ b,\ x)\\
&= (a,\ b,\ x-x^*) = -p\sin\varphi.
\end{aligned}
$$

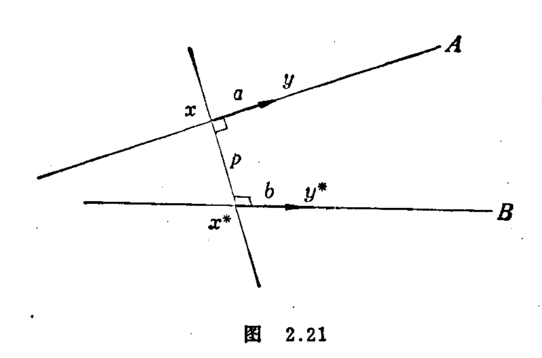


图 2.21

这个最后方程是把左边的行列式作为由它的行向量张成的平行六面体的（有向）体积而推出的。现在对偶向量的公式是

$$A\cdot B=\cos\varphi-\tau p\sin\varphi. \tag{4.9}$$

这个方程可以写为更简明的形式如下：

对于直线 A，B 定义一个对偶数：

$$\Phi=\varphi+\tau p, \tag{4.10}$$

称 Φ 为 A，B 的**对偶角**。

一个对偶三角函数的形式上的定义：

$$\cos\Phi = 1 - \frac{1}{2!}\Phi^2 + \frac{1}{4!}\Phi^4 - \cdots$$

给出

$$\begin{aligned}\cos\Phi &= 1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 - \cdots \\ &\quad - \tau p\left(\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 - \cdots\right) \\ &= \cos\varphi - \tau p \sin\varphi,\end{aligned}$$

从此

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \cos\Phi, \qquad (4.9)'$$

两直线之间的角和距离在 E^3 中的欧氏运动之下是不变的，从而对偶角也不变。所以在 D^3 中对应的变换保持数量 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}'\mathbf{B}$ 不变。它具有对偶系数的一个正交矩阵的作用。在 D^3 中变换群(在 E^3 中欧氏运动的象）不包含任一平移，因为对偶单位球面的中心必保持不动。

定理2.31 在 E^3 中的欧氏运动在 D^3 中是由对偶正交矩阵 $\mathscr{X} = (X_{ij})$ 来表示的，其中 $x'x = U$，X_{ij} 为对偶数。

在对偶单位球面上依赖于一个实参数 t 的一条可微曲线 $\mathbf{A}(t)$ 表示 E^3 中一个可微直线族，即一个直纹面。这些直线 $\mathbf{A}(t)$ 都是曲面的母线。

对一条 C^2 曲线 $\mathbf{A}(t)$ 的一个标准正交标架是

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}(t), \quad \mathbf{A}_2 = \frac{\dot{\mathbf{A}}_1(t)}{\sqrt{\dot{\mathbf{A}}^2}}, \qquad \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2, \qquad (4.11)$$

这里必须假定 $\mathbf{a}(t)$ 沿着 $\mathbf{A}(t) = \mathbf{a}(t) + \tau\bar{\mathbf{a}}(t)$ 不是常向量，即直纹面不是一个柱面。在这个情形下，$\dot{\mathbf{A}}_1^2 = s + \tau r$ 有一个正的实部分 s；因而可以求平方根：$s + \tau r = (x + \tau y)^2$，如果 $x = \sqrt{s}$，$y = \frac{r}{2x}$。由假定，$x \neq 0$；所以 $\mathbf{A}_2$ 有定义。从 $\mathbf{A}_1^2 = 1$

求导，表明 $\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2=0$。从 $x(y\times z)=(x,y,z)$ 可以推出其余的正交性关系式：$\mathbf{A}_3\cdot\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_3\cdot\mathbf{A}_2=0$。由直接计算可以验证，两个对偶单位向量的向量积仍是一个单位向量，$\mathbf{A}_3^2=(\mathbf{A}_3,\ \mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2)=1$。

标架（4.11）在 E^3 中有一个直观的解释。由（4.9），$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$ 表示两直线 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 交于直角。所以 $\mathbf{A}_1$，$\mathbf{A}_2$，$\mathbf{A}_3$ 是 E^3 中三条共点的互相正交的直线。它们的交点称为母线 $\mathbf{A}_1(t)$ 上的**腰点**，记作 $\mathbf{s}(t)$。$\mathbf{s}(t)$ 的轨迹称为直纹面上的**腰曲线**。$\mathbf{A}_3$ 是 $\mathbf{A}_1(t)$ 和

$$\mathbf{A}_1(t+\Delta t)=\mathbf{A}_1(t)+\Delta t\dot{\mathbf{A}}_1(t+\theta\Delta t)$$
$$=\mathbf{A}(t)+h(t,\Delta t)\mathbf{A}_2(t+\theta\Delta t)$$
$$(0\leqslant\theta\leqslant 1)$$

的公垂线的极限位置，因为 $\mathbf{A}_3$ 同时垂直于 $\mathbf{A}_1$ 和 $\mathbf{A}_2$。这表明，在 $\mathbf{A}(t)$ 上的腰点是 $\mathbf{A}(t)$ 与“邻近母线具有最短距离”的点，$\mathbf{A}_3(t)$ 在腰点处切于曲面，于是 $\mathbf{A}_2(t)$ 是曲面在 $\mathbf{s}(t)$ 的法线。由构造，Frenet 方程是

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\\ \mathbf{A}_2\\ \mathbf{A}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & K & 0\\ -K & 0 & T\\ 0 & -T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\\ \mathbf{A}_2\\ \mathbf{A}_3\end{pmatrix},\qquad (4.12)$$

式中

$$K=\sqrt{\dot{\mathbf{A}}_1^2},\quad K^2T=(\mathbf{A},\ \dot{\mathbf{A}},\ \ddot{\mathbf{A}}).\qquad (4.13)$$

这个简化型的 Cartan 矩阵（$p_{13}=0$）是没有导入一个不变参数而得到的。$K(t)=k_1(t)+\tau k_2(t)$ 和 $T(t)=t_1(t)+\tau t_2(t)$ 不是不变量。积分 $\int K dt$ 和 $\int T dt$ 是曲线 $\mathbf{A}_1$ 和 $\mathbf{A}_3$ 的对偶弧长，所以都是积分不变量。从此

$$\int k_1 dt,\quad \int k_2 dt,\quad \int t_1 dt,\quad \int t_2 dt,$$

都是**积分不变量**。

原来直纹面与参数的选取无关，所以参数尚可适当地选取，如果$k_1(t)=0$，一切母线是平行的，于是曲面是一个柱面。标架（4.11）不能确定，因为没有可区别的腰点。如果$k_1(t)\neq 0$，就可以由

$$k_1(\sigma)=1$$

来给出一不变参数σ的定义。用这个不变参数表达，一阶不变量是

$$k_2=\mathrm{a}'\cdot\bar{\mathrm{a}}', \tag{4.14a}$$

二阶不变量是

$$t_1=(\mathrm{a},\ \mathrm{a}',\ \mathrm{a}''), \tag{4.14b}$$

$$t_2=(\bar{\mathrm{a}},\ \mathrm{a}',\ \mathrm{a}'')+(\mathrm{a},\ \bar{\mathrm{a}}',\ \mathrm{a}'')+(\mathrm{a},\ \mathrm{a}',\ \bar{\mathrm{a}}'')-2k_2t_1. \tag{4.14c}$$

Frenet 公式（4.12）可分解为实部分和对偶部分：

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathrm{a}_1\\ \mathrm{a}_2\\ \mathrm{a}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k_1 & 0\\ -k_1 & 0 & t_1\\ 0 & -t_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{a}_1\\ \mathrm{a}_2\\ \mathrm{a}_3\end{pmatrix}, \tag{4.12a}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\bar{\mathrm{a}}_1\\ \bar{\mathrm{a}}_2\\ \bar{\mathrm{a}}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k_1 & 0\\ -k_1 & 0 & t_1\\ 0 & -t_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\mathrm{a}}_1\\ \bar{\mathrm{a}}_2\\ \bar{\mathrm{a}}_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & k_2 & 0\\ -k_2 & 0 & t_2\\ 0 & -t_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{a}_1\\ \mathrm{a}_2\\ \mathrm{a}_3\end{pmatrix}. \tag{4.12b}$$

由方程（4.7），腰点满足

$$\mathrm{s}\times\mathrm{a}_1=\bar{\mathrm{a}}_1,\ \mathrm{s}\times\mathrm{a}_2=\bar{\mathrm{a}}_2,\ \mathrm{s}\times\mathrm{a}_3=\bar{\mathrm{a}}_3, \tag{4.15}$$

若把腰曲线的切线写为$\frac{d\mathrm{s}}{dt}=\alpha\mathrm{a}_1+\beta\mathrm{a}_2+\gamma\mathrm{a}_3$，则系数由s的上列三个方程求导可以计算，结果是

$$\frac{d\mathrm{s}}{dt}=t_2\mathrm{a}_1+k_2\mathrm{a}_3. \tag{4.15'}$$

对于直纹面，由公式（4.9）我们有

$$\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{A}(t+\Delta t)=\cos\varphi(t,\ \Delta t)-\tau p(t,\ \Delta t)\sin\varphi(t,\ \Delta t),$$

我们称

$$d(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(t,\Delta t)}{\varphi(t,\Delta t)}$$

为曲面的**分布参数**。不难证明，它可以用曲面的不变量来表达：

$$d(t)=k_2(\sigma)=\frac{k_2(t)}{k_1(t)}. \tag{4.16}$$

例 等轴双曲抛物面

$$x_3=x_1^2-x_2^2$$

是一直纹面，例如，由直线族

$$x_1+x_2=tx_3,\quad x_1-x_2=\frac{1}{t}$$

生成的，参数 t 的母线通过两点

$$\left(\frac{1}{2t},\ -\frac{1}{2t},\ 0\right),\ \left(\frac{t^2+1}{2t},\ \frac{t^2-1}{2t},\ 1\right).$$

从此它是对偶球面上的点

$$\mathbf{A}=(4+2t^2)^{-1/2}[(t,\ t,\ 2)+\tau t^{-1}(-1,\ -1,\ t)].$$

从

$$\dot{\mathbf{A}}=4(4+2t^2)^{-3/2}\Big[(1,1,-t)+\tau\left(\frac{t^2+1}{t^2},\ \frac{t^2-1}{t^2},\ -\frac{t}{2}\right)\Big],$$

我们有

$$\dot{\mathbf{A}}^2=\frac{2}{(2+t^2)^2}\left(1+\tau\frac{t^2+2}{t^2}\right),$$

从此

$$|\dot{A}|=\frac{\sqrt{2}}{2+t^2}+\tau\frac{1}{\sqrt{2}t^2},$$

和

$$A_2=(2+t^2)^{1/2}\left[(1,1,-t)+\tau\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{t}\right)\right],$$

$$A_3=2^{-1/2}(-1,\ 1,\ 0),$$

$$k_1=\frac{\sqrt{2}}{2+t^2},\ k_2=\frac{1}{\sqrt{2}t^2},\ t_1=t_2=0.$$

腰曲线是直线 $x_1=x_2$, $x_3=0$。(抛物面也可以是由第二族直线 $x_1+x_2=t$, $x_1-x_2=\frac{x_3}{t}$ 生成的一个直纹面，它的腰曲线是 $x_1=-x_2$, $x_3=0$。)

2. 可展面 若 $k_2=0$，则由 (4.15)′ 可知，s′ 的方向是 a_1，所以母线是腰曲线的切线。因此，所论的直纹面不过是一条空间曲线的切线所构成的曲面，这种曲面称为切线曲面，这条空间曲线称为脊线，在我们的情形，脊线就是腰曲线 s(t)。a_2 和 a_3 分别为 s 的主法线和副法线。

若 $t_2\equiv k_2\equiv 0$，则 $s'=0$。于是腰点是一固定点。所以曲面的一切母线通过这固定点，因而曲面是以 s 为顶点的一个锥面。

若 $k_2\neq 0$，$t_2\equiv 0$，则腰曲线 s(t) 切于 a_3；它垂直于过 s(t) 的母线。曲面 A_3 是一切线曲面；从 $k_2=0$ 的情形讨论中可以看到，这里 a_1 是 s(t) 的副法线，于是曲面是由一条空间曲线的副法线生成的。

若 $k_1=0$，则由 (4.12a)，$\frac{da_1}{dt}=k_1a_2=0$，故 $a_1=\text{const}$，因而曲面是一个柱面。

若 $t_2\equiv 0$，$a_3=\text{const}$，则向量 a_1 总是平行于与 a_3 正交的一个定平面，称它为曲面的一个方向平面。例如抛物面为属于这类

的一个直纹面。

切线曲面、锥面和柱面总称为**可展面**或**挠曲面**。因此，有时称非可展的直纹面为**斜曲面**。

现在来考察切线曲面在其自身的脊线的邻域中的结构。

取脊线的弧长为参数，令其方程为

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(s);$$

则切线曲面上的动点 $\mathbf{r}$ 是

$$\mathbf{r}(s,\lambda)=\mathbf{x}(s)+\lambda\mathbf{t}. \tag{4.17}$$

在脊线上任取一点 P_0，其弧长从 P_0 算起（$s=0$），并取在点 P_0 的活动标架为参考标架，然后把曲面的方程展开为 s，λ 的幂级数，

$$\mathbf{r}(s,\lambda)=\mathbf{r}(0,0)+\mathbf{r}_s^0 s+\mathbf{r}_\lambda^0\lambda$$
$$+\frac{1}{2}(\mathbf{r}_{ss}^0 s^2+2\mathbf{r}_{s\lambda}^0 s\lambda+\mathbf{r}_{\lambda\lambda}^0\lambda^2)+\cdots,$$

式中 $\mathbf{r}_s^0$，$\mathbf{r}_\lambda^0$ 等表示 $\mathbf{r}_s$，$\mathbf{r}_\lambda$ 等在 $s=0$，$\lambda=0$ 的值。从 (4.17)，并应用 Frenet 方程，求得

$$\mathbf{r}_s=\mathbf{t}+k\lambda\mathbf{n},\quad \mathbf{r}_\lambda=\mathbf{t},$$

$$\mathbf{r}_{ss}=-k^2\lambda\mathbf{t}+(k+k'\lambda)\mathbf{n}+k\tau\lambda\mathbf{b},$$

$$\mathbf{r}_{s\lambda}=k\mathbf{n},\quad \mathbf{r}_{\lambda\lambda}=0$$

等等，从而不难算出：

$$\mathbf{r}(0,0)=\mathbf{x}(0),\quad \mathbf{r}_s^0=\mathbf{r}_\lambda{}^0=\mathbf{t}(0),$$

$$\mathbf{r}_{ss}^0=\mathbf{r}_{s\lambda}^0=k(0)\mathbf{n}(0),\ \mathbf{r}_{\lambda\lambda}^0=0,$$

$$\mathbf{r}_{sss}^0=\mathbf{r}_{ss\lambda}^0=-k^2(0)\mathbf{t}(0)+k'(0)\mathbf{n}(0)$$
$$+k(0)\tau(0)\mathbf{b}(0).$$

从此，把 $k(0)$，$k'(0)$ 等等写为 k_0，k_0' 等等，就有

$$\mathbf{r}(s,\lambda)=\mathbf{x}(0)+x\mathbf{t}(0)+y\mathbf{n}(0)+z\mathbf{b}(0),$$

式中

$$x = s + \lambda - \frac{k_0^2}{6} s^3 - \frac{k_0^2}{6} s^2\lambda + \cdots,$$

$$y = \frac{k_0}{2} s^2 + k_0 s\lambda + \frac{k_0'}{6} s^3 + \frac{k_0'}{2} s^2\lambda + \cdots,$$

$$z = \frac{k_0\tau_0}{6} s^3 + \frac{k_0\tau_0}{2} s^2\lambda + \cdots,$$

或即

$$x = \left(s - \frac{k_0^2}{6} s^3 + \cdots \right) + \lambda \left(1 - \frac{k_0^2}{2} s^2 + \cdots \right),$$

$$y = \left(\frac{k_0}{2} s^2 + \cdots \right) + \lambda\ (k_0 s + \cdots),$$

$$z = \left(\frac{k_0\tau_0}{6} s^3 + \cdots \right) + \lambda \left(\frac{k_0\tau_0}{2} s^2 + \cdots \right).$$

若寻求切线曲面与在点 P_0 的法平面 $x = 0$ 的交线，则它的参数方程可从 $x = 0$ 解出 λ，然后把这样得到的 λ 的值代进 y 和 z 的表达式中即可得到。利用上面的展开式，从 $x = 0$ 得到

$$\lambda = -\frac{s - \frac{k_0^2}{6} s^3 + \cdots}{1 - \frac{k_0^2}{2} + \cdots} = - s - \frac{k_0^2}{3} s^3 + \cdots,$$

然后把这个 λ 的值代进 y 和 z 的表达式中，得到所求交线的一个参数方程：

$$x = 0, \quad y = -\frac{k_0}{2} s^2 + \cdots, \quad z = -\frac{k_0\tau_0}{3} s^3 + \cdots,$$

若 $k_0 \neq 0$，$\tau_0 \neq 0$，这曲线是以原点 x(0) 为尖点，而以 y 轴为其切线的曲线。由此可见，曲面包含两叶，以脊线作为曲面的"尖锐的棱边"，这就是脊线这个命名的由来。

因为切线曲面被它的脊线分为两叶，并且 $\lambda = 0$ 给出脊线上

的点，$\lambda>0$ 对应其中一叶上的点，$\lambda<0$ 对应另一叶上的点。因此，脊线的正半切线构成切线曲面的一叶，负半切线构成另一叶（图 2.20），这两叶沿脊线而割开，同时沿这条脊线非常独特地粘在一起。

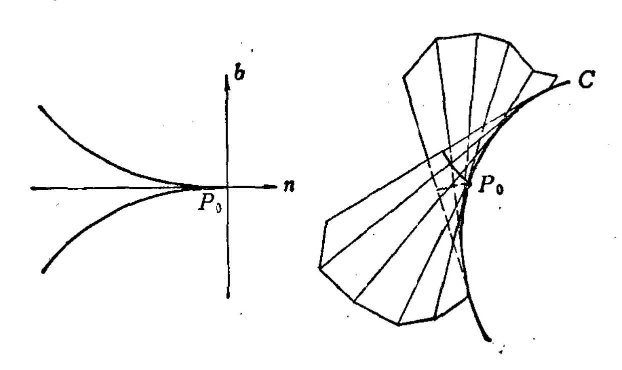


图 2.22

现在来考虑总曲率$K=k_1k_2=0$的曲面。

对于$K=0$的曲面（除了平面外），我们可以假定主曲率$k_1\neq 0, k_2=0$，由方程 $(3.22)_3$ 与 $\pi_i^3=k_i\pi^i$（$i=1,2$）可知

$$\pi_1^2\wedge\pi_1^3=k_1\pi_1^2\wedge\pi^1=0 \qquad (\text{因 } \pi_2^3=k_2\pi^2=0),$$

从而 $\pi_1^2=a\pi^1$。曲率线 $s^1=\text{const}$ 是 $\pi^1=0$ 的积分曲线，它们的 Frenet 方程是 $d\{\mathbf{a}_i\}=0$；并且是沿着方向 $d\mathbf{r}=\pi^2\mathbf{a}_2$ 的直线。所以曲面是：或者以 $\mathbf{s}(s^2)=\mathbf{s}_0+\int\mathbf{a}_2(s^2)ds^2$ 为脊线的切线曲面，或者锥面 $\mathbf{s}(s^2)=\mathbf{s}_0$，或者柱面（无 $\mathbf{s}_0$ 存在）。按定义，因为脊线（或锥面的顶点）不是曲面的一部分，第一段的方法较好地适用于研究这些曲面。曲率线 $s^2=\text{const}$ 是渐开线的推广，因为渐开线是一空间曲线的切线的正交轨线。另一方面，对任一切线曲面、锥面或柱面的$K=0$，因为母线都是曲率线。

定理2.32 曲面是一可展曲面（即切线曲面、锥面或柱面）的一个充要条件是$K=0$。

经过一个坐标变换 $u^\alpha=u^\alpha(v^1,v^2)$，平面的 ds^2 变为$E(dv^1)^2+$

$2Fdv^1dv^2+G(dv^2)^2$. 若 v 坐标曲线是互相垂直的，则 $F=0$。为了简化问题，我们要使 $E=(u^1_{v1})^2+(u^2_{v1})^2=1$，则 $K=k_1=0$，于是证明了一切切线曲面和一切锥面可以由规定的各种可能 v^α 坐标作为曲率线参数而得到：一曲面与平面局部等距的一个充要条件是 $K=0$。

3. 直线汇 含有两个参数的直线 $\mathbf{A}(u^1, u^2)$ 的轨迹称为直线汇，这里 $\mathbf{A}(u^1, u^2)$ 在对偶单位球面上。我们假定处处使 $d\mathbf{A}$"×"$d\mathbf{A}\neq 0$。附在一个单位球面上的一曲线的 Frenet 标架是它的活动标架（若 $\mathbf{A}_1=\mathbf{A}$ 代替 $\mathbf{A}_3$，以 $-\mathbf{A}_3$ 代替 $\mathbf{A}_1$），因为在一球面上法线是半径 $\mathbf{A}$。曲面的论述不能直接转移到线汇上来，因为 $\mathbf{A}=\mathbf{N}$ 意思是 $\mathrm{II}=ds^2$；在对偶单位球面上，一切点都是脐点，正象笛氏球面上的点。对直线汇作较深入的论述是根据这样的事实，即 $ds^2=d\mathbf{A}\cdot d\mathbf{A}=d\mathbf{a}\cdot d\mathbf{a}+2\tau d\mathbf{a}\cdot d\bar{\mathbf{a}}$ 自身包含两个二次形式，利用这两个二次形式就足以开展整个理论，即利用第一基本形式：

$$d\sigma^2=d\mathbf{a}\cdot d\mathbf{a}=g_{11}(du^1)^2+2g_{12}du^1du^2+g_{22}(du^2)^2$$

和第二基本形式：

$$\mathrm{II}=d\mathbf{a}\cdot d\bar{\mathbf{a}}=l_{11}(du^1)^2+2l_{12}du^1du^2+l_{22}(du^2)^2.$$

这两个形式称为 Sannia 形式。对两个已知基本形式的可积条件可以形式上从度量 ds^2 计算总曲率必为 $+1$（因对偶单位球面是它自身的球面象，但单位球面的总曲率 $=+1$）。

在对偶球面上选取一标架族 $\{\mathbf{E}_i\}$ 使得 $\mathbf{E}_1=\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}_2$，$\mathbf{E}_3$ 切于球面。活动标架从一个固定标架经过一个正交对偶变换而得到。Frenet 方程是

$$d\begin{pmatrix}\mathbf{E}_1\\ \mathbf{E}_2\\ \mathbf{E}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \Omega_1^2 & \Omega_1^3\\ -\Omega_1^2 & 0 & \Omega_2^3\\ -\Omega_1^3 & -\Omega_2^3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_1\\ \mathbf{E}_2\\ \mathbf{E}_3\end{pmatrix}(\Omega_i^j=\omega_i^j+\tau\bar{\omega}_i^j),$$

由一个实矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

决定的标架的一个旋转把 Cartan 矩阵变到

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega_1^2\cos\varphi+\Omega_1^3\sin\varphi & -\Omega_1^2\sin\varphi+\Omega_1^3\cos\varphi \\ -\Omega_1^2\cos\varphi-\Omega_1^3\sin\varphi & 0 & \Omega_2^3+d\varphi \\ \Omega_1^2\sin\varphi-\Omega_1^3\cos\varphi & -\Omega_2^3-d\varphi & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

若 $\bar\omega_1^2=\kappa_1\omega_1^2$，$\bar\omega_1^3=\kappa_2\omega_1^3$，则两个基本形式都是对角型：

$$d\sigma^2=(\omega_1^2)^2+(\omega_1^3)^2 \text{ 和 } \mathrm{I}=\omega_1^2\bar\omega_1^2+\omega_1^3\bar\omega_1^3.$$

这由
$$\bar\omega_1^2\cos\varphi+\bar\omega_1^3\sin\varphi=\kappa_1(\omega_1^2\cos\varphi+\omega_1^3\sin\varphi),$$
$$-\bar\omega_1^2\sin\varphi+\bar\omega_1^3\cos\varphi=\kappa_2(-\omega_1^2\sin\varphi+\omega_1^3\cos\varphi)$$

决定的一个旋转可以达到。如同曲面的情形那样，称这样得到的两个方向为 E_1 中直线汇的两个**主方向**。通过汇中每一直线有两个**主曲面**，它们在对偶球面上的象取作参数曲线。对这特殊系，仍以 $\mathbf{A}_i$ 表示标架向量并以 π_i^j 和 $\bar\pi_i^j$ 表示关于 Cartan 矩阵的线性形式，在两系主曲面上的对偶弧长可以取作参数，现在 Frenet 方程是

$$d\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \pi_1^2 & \pi_1^3 \\ -\pi_1^2 & 0 & \pi_2^3 \\ -\pi_1^3 & -\pi_2^3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix},$$

$$d\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 \\ \bar{\mathbf{a}}_2 \\ \bar{\mathbf{a}}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \kappa_1\pi_1^2 & \kappa_2\pi_1^3 \\ -\kappa_1\pi_1^2 & 0 & \bar\pi_2^3 \\ -\kappa_2\pi_1^3 & -\bar\pi_2^3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix} 0 & \pi_1^2 & \pi_1^3 \\ -\pi_1^2 & 0 & \pi_2^3 \\ -\pi_1^3 & -\pi_2^3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 \\ \bar{\mathbf{a}}_2 \\ \bar{\mathbf{a}}_3 \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

κ_1 和 κ_2 是两系主曲面上的不变量 $k_2(\sigma)$。标架是附在过一已知母线的两个主曲面的腰点处；这称为汇中直线的中心点 m。因为它沿一直纹面变动，我们把方程 $\mathbf{m}\times\mathbf{a}_i=\bar{\mathbf{a}}_i$（见（4.15））微分，得到

$$d\mathbf{m}=\pi_2^3\mathbf{a}_1-\kappa_2\pi_1^3\mathbf{a}_2+\kappa_1\pi_1^2\mathbf{a}_3, \tag{4.20}$$

通过某一母线（与主曲面 $\pi_1^3=0$ 做成一角 φ）的一条对偶曲线有由向量

$$\mathbf{e}_2=\mathbf{a}_2\cos\varphi+\mathbf{a}_3\sin\varphi$$

确定的一个标架，对这条曲线（比较（4.12）与（4.19）），

$$k_2(\varphi)=\kappa_1\cos^2\varphi+\kappa_2\sin^2\varphi. \tag{4.21}$$

这叫作 Hamilton 公式，类似于曲面论中的欧拉公式 $(3.34)_1$。关于汇的一直纹面的腰点可以从它到中心点的距离 ρ 而求出：

$$\mathbf{s}=\mathbf{m}+\rho\mathbf{e}_1=\mathbf{m}+\rho\mathbf{a}_1.$$

由 $(4.15)'$，$d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{e}_1=0$；从此（关于对称积）

$$\rho[(\pi_1^2)^2+(\pi_1^3)^2]+(\kappa_1-\kappa_2)\pi_1^2\pi_1^3=0.$$

因为 $\pi_1^2=\cos\varphi d\sigma$，$\pi_1^3=\sin\varphi d\sigma$，我们得到方程 $(3.34)_2$ 的一个类似方程

$$\rho=(\kappa_2-\kappa_1)\cos\varphi\sin\varphi. \tag{4.22}$$

下列命题让读者证明：

1° 在直纹面的一条母线 l 上各点的切面都通过 l。在一般直纹面上，l 上四点的交比等于这四点的四个切面的交比。（l 上的点和在这点的切面之间的对应称为 Chasles 的对偶。）

2° 证明直纹面的总曲率是

$$K=-\left(\frac{k_1k_2}{k_1^2r+k_2^2}\right)^2,$$

式中 r 是从母线上一点到腰点的距离，由此可见，直纹面的总曲

率一般取负值。

3° 写出方程（4.19）的可积条件，并叙述必要的可微性的假定。

4° 说明，若π_1^2，π_1^3，κ_1，κ_2是已知的，如何计算π_2^3和π_2^3(必须先解第3°题)。

5° 是否可以寻求通过任一汇的一给定母线的一可展曲面？(分别讨论双曲点和椭圆点。第3°题的方程是需要的。)

6° 若A是一法线汇和B是使$\mathbf{A}(u^1, u^2)\cdot\mathbf{B}(u^1, u^2)=\cos\varphi_0=$ const的一个汇，证明B也是一法线汇（Malus与Dupin）。

7° 若$\kappa_1=\kappa_2$，则称母线是脐母线。若一个汇的直线都是脐母线，则称它为迷向汇。证明对迷向汇的直纹面的一切腰曲线在中心曲面m上。

8° 证明一个汇是迷向的充要条件是它的一切直纹面的不变量k_2单是u^1，u^2不是du^1，du^2的函数。

9° 对一迷向汇$d\mathbf{m}\cdot d\mathbf{e}_1=0$。不用计算建立这个结果。

10° 对Ⅱ$(du^1, du^2)=0$的两个方向所张成的平面叫做焦平面。

证明迷向汇无焦平面。

第三章　仿射微分几何

本章论述仿射空间中的微分几何，着重研究在仿射群之下曲线和曲面的不变性质，基本上介绍曲线和曲面的局部性质。

§3.1. 平面曲线的仿射微分几何

本节研究平面曲线在平面上的么模（等积）仿射变换群之下的不变性质、平面上的么模仿射变换可写为如下的形式：

$$x_1^* = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1,\quad x_2^* = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1, \tag{1.1}$$

或即

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}A + \mathbf{b}, \tag{1.1$'$}$$

式中

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 1,\quad \mathbf{b} = (b_1,\ b_2).$$

由此可见，平面上的么模仿射群是由仿射平面 A^2 上么模线性群 SL_2和平移群 R^2 的作用而生成的。具有五个本质参数。在这个群之下，没有距离、角度等概念，但是有面积、向量、平行等概念。下面的讨论要寻求与曲线有密切联系的标架、不变参数与不变量。

1. 活动标架　设O为平面 A^2上一个固定原点，以 $\mathbf{x}$ 表示向量OX，引用与 $\mathbf{x}$ 有同一起点的两个向量 $\mathbf{e}_1$和 $\mathbf{e}_2$，组成公共标架，使得以 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ 为边的平行四边形的面积 $\det(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2) = \|\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\| = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = 1$。标架的位移决定于下列关系式：

$$d\mathbf{x} = \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2,$$

$$de_1=\omega_1^1 e_1+\omega_1^2 e_2,\qquad (1.2)$$
$$de_2=\omega_2^1 e_1+\omega_2^2 e_2.$$

把等式$\|e_1,\ e_2\|=1$求导，并应用（1.2），便得$\omega_1^1+\omega_2^2=0$，或即$\omega_2^2=-\omega_1^1$。这时结构方程（或可积条件）有如下的形式：

$$\begin{aligned}
d\omega^1&=\omega^1\wedge\omega_1^1+\omega^2\wedge\omega_2^1,\\
d\omega^2&=\omega^1\wedge\omega_1^2-\omega^2\wedge\omega_1^1,\\
d\omega_1^1&=\omega_1^2\wedge\omega_2^1,\qquad (1.3)\\
d\omega_1^2&=2\omega_1^1\wedge\omega_1^2,\\
d\omega_2^1&=-2\omega_1^1\wedge\omega_2^1.
\end{aligned}$$

现在考虑一条C^4平面曲线C：

$$x(t)=x_1(t)e_1+x_2(t)e_2,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1,\qquad (1.4)$$

并在曲线C上每点作一个标架$\{a_1,\ a_2\}$，使得a_1为C在该点的切向量和标架矩阵$A(t)$，

$$\{a_1(t),\ a_2(t)\}=A(t)\{e_1,\ e_2\}\qquad (1.5)$$

是在SL_2中，$\|A(t)\|=1$（图 3.1），在曲线（1.4）上每点由标架$\{\dot{x}(t),\ \ddot{x}(t)\}$决定一个斜交坐标系.（在坐标轴上带着不相等的单位长），如果$\dot{x}(t)$，$\ddot{x}(t)$是线性无关的；就是说，对一切t，$\|\dot{x}(t),\ \ddot{x}(t)\|\neq 0$。在欧氏几何中，这个条件就是曲率$k(t)\neq 0$。所以暂时假定在曲线弧上的曲率带有定号。

我们可以假定$\|\dot{x}(t),\ \ddot{x}(t)\|>0$，不致失去一般性；若行列式$<0$，则施行参数变换$t=-u$，就可使$\|\dot{x}(u),\ \ddot{x}(u)\|>0$。我们取

$$a_1=\|\dot{x}(t),\ \ddot{x}(t)\|^{-1/2}\dot{x}(t),$$
$$a_2=\|\dot{x}(t),\ \ddot{x}(t)\|^{-1/2}\ddot{x}(t),$$

则由这两个向量决定的平行四边形的面积$|a_1(t),\ a_2(t)|=1$；（1.5）中的标架矩阵

$$A(t)=\frac{1}{(\dot{x}_1\ddot{x}_2-\ddot{x}_1\dot{x}_2)^{1/2}}\begin{pmatrix}\dot{x}_1 & \dot{x}_2\\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2\end{pmatrix}\qquad (1.6)$$

是么模仿射的。现在的主要问题是来考察在 Cartan 矩阵$C(A)$

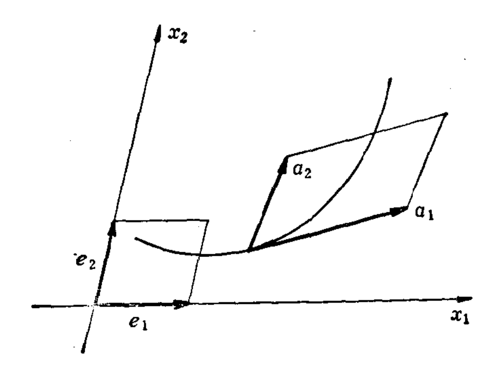


图 3.1

$=\dot{A}A^{-1}$的元素之间的不变量．因为一个群G到$\mathscr{L}(G)$的Cartan映射$A(t)\to C(A)(t)$在G的作用之下是自身不变的．故由方程（1.6.7）就有

定理3.1 假定$A(t)$是在一个Lie群G中一个可微矩阵和M是G的一个常元素，则$C(A)=C(AM)$．

方程（1.6）所表达的$A(t)$的Cartan矩阵是

$$C(A)=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\|\dot{\mathrm{x}},\ \dddot{\mathrm{x}}\|}{\|\dot{\mathrm{x}},\ \ddot{\mathrm{x}}\|} & 1 \\ -\dfrac{\|\ddot{\mathrm{x}},\ \dddot{\mathrm{x}}\|}{\|\dot{\mathrm{x}},\ \ddot{\mathrm{x}}\|} & +\dfrac{1}{2}\dfrac{\|\dot{\mathrm{x}},\ \dddot{\mathrm{x}}\|}{\|\dot{\mathrm{x}},\ \ddot{\mathrm{x}}\|} \end{pmatrix},$$

这个矩阵的迹是零，实际上它必须是$\mathscr{L}(SL_2)$的元素．现在Cartan方法的本质问题是企图（引用不变条件）来寻找一标架族使得$C(A)$的系数尽可能多地等于零．在我们的情形，若

$$\|\dot{\mathrm{x}},\ \dddot{\mathrm{x}}\|=\frac{d}{dt}\|\dot{\mathrm{x}},\ \ddot{\mathrm{x}}\|=0,$$

则$C(A)$的对角元素是零．所以要寻找一个参数σ，使得面积

$$\left\|\frac{d\mathrm{x}}{d\sigma},\ \frac{d^2\mathrm{x}}{d\sigma^2}\right\|=1.$$

这个不变参数σ从

$$\left\|\frac{d\mathrm{x}}{dt},\ \frac{d^2\mathrm{x}}{dt^2}\right\|=\left\|\frac{d\mathrm{x}}{d\sigma},\ \frac{d^2\mathrm{x}}{d\sigma^2}\right\|\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^3=\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^3 \qquad (1.7)$$

可以得到，即

$$\sigma=\int_{t_0}^{t}\|\dot{\mathrm{x}}(t),\ \ddot{\mathrm{x}}(t)\|^{1/3}dt \tag{1.7'}$$

我们称σ为曲线C的仿射弧长。关于不变参数σ的导数仍以撇表示，则有

$$|\mathrm{x}',\ \mathrm{x}''|=1,\quad \mathrm{a}_1=\mathrm{x}',\quad \mathrm{a}_2=\mathrm{x}'',$$

沿方向a_2的直线称为曲线C的仿射法线。活动标架矩阵

$$A(\sigma)=\begin{pmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1'' & x_2'' \end{pmatrix},$$

又它的Cartan矩阵是

$$C(A)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\|\mathrm{x}'',\ \mathrm{x}'''\| & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

这个矩阵由函数

$$\kappa(\sigma)=\|\mathrm{x}'',\ \mathrm{x}'''\|=x_1''x_2'''-x_1'''x_2'' \tag{1.9}$$

可以完全决定，称κ(σ)为平面曲线的仿射曲率。定理3.1表明仿射曲率是么模仿射几何的一个微分不变量。这时平面曲线$\mathrm{x}(\sigma)$的Frenet方程

$$\{\mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_2\}'=C(A)\{\mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_2\}$$

可写为

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{x}}{d\sigma}&=\mathrm{a}_1, \\ \frac{d\mathrm{a}_1}{d\sigma}&=\mathrm{a}_2, \\ \frac{d\mathrm{a}_2}{d\sigma}&=-\kappa\mathrm{a}_1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

以$\mathrm{a}_2=\mathrm{x}''$，$\mathrm{a}_1=\mathrm{x}'$代入最后一式得到曲线$\mathrm{x}(\sigma)$所满足的基本方程

$$\mathrm{x}'''+\kappa(\sigma)\mathrm{x}'=0, \tag{1.11}$$

这样，从定理1.15和1.16可知，当κ(σ)给定时，则可作出$A(\sigma)$的结构和$\mathrm{x}(\sigma)$。因此我们有仿射平面曲线的基本定理：

定理3.2 一条平面曲线，除了一个么模仿射变换外，由它的仿射曲率作为仿射弧长的一个函数的自然方程 $\kappa=\kappa(\sigma)$ 唯一地确定。

与欧氏几何的情形一样，若标架的 Cartan 矩阵的一切系数是常数或不变量，则称它为曲线 $x(t)$ 的 Frenet 标架，在定义方程（1.9）中，只出现三阶导数。虽然如此，但是以一般参数 t 来表达 κ，则是一个四阶不变量；现在就要计算这个表达式，我们有

$$\mathbf{x}'=\dot{\mathbf{x}}\frac{dt}{d\sigma},\quad \mathbf{x}''=\ddot{\mathbf{x}}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2\right],$$

$$\mathbf{x}'''=\dddot{\mathbf{x}}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^3+\frac{3}{2}\ddot{\mathbf{x}}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2\right]\frac{dt}{d\sigma}$$
$$+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}\frac{d^2}{dt^2}\left[\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2\right]\frac{dt}{d\sigma}.$$

代入（1.9），就有

$$\kappa(\sigma)=\|\ddot{\mathbf{x}},\ \dddot{\mathbf{x}}\|\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^5-\frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}},\ \ddot{\mathbf{x}}\|\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^3\cdot\frac{d^2}{dt^2}\left[\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2\right]$$
$$+\frac{3}{4}\|\dot{\mathbf{x}},\ \ddot{\mathbf{x}}\|\frac{dt}{d\sigma}\left\{\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2\right]\right\}^2$$
$$+\frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}},\ \dddot{\mathbf{x}}\|\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^3\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2\right].$$

注意到等式（1.7），我们看出，上式中后两项消去，于是最后得到

$$\kappa(\sigma)=\|\dot{\mathbf{x}},\ \ddot{\mathbf{x}}\|^{-5/3}\|\ddot{\mathbf{x}},\ \dddot{\mathbf{x}}\|-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|\dot{\mathbf{x}},\ \ddot{\mathbf{x}}\|^{-2/3}. \tag{1.12}$$

例如，若曲线的方程为 $y=f(x)$，则由（1.7）与（1.12），我们求得

$$d\sigma=\ddot{y}^{1/3}dx,\quad \kappa(\sigma)=\frac{-1}{2}\frac{d^2}{dx^2}(\ddot{y}^{-2/3}).$$

2. 几何解释．二次曲线 先给出仿射弧素的几何解释。考虑曲线 C 上两邻点 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}=\mathbf{x}(t+\Delta t)$，在这两点的切线的交点 $\mathbf{P}$ 由下面公式给出：

$$\mathbf{P}=\mathbf{x}+\dot{\mathbf{x}}\lambda=\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}+\mu(\dot{\mathbf{x}}+\Delta\dot{\mathbf{x}})=\dot{\mathbf{x}}+\dot{\mathbf{x}}(\Delta t+\mu)$$
$$+\ddot{\mathbf{x}}\Delta t\left(\frac{\Delta t}{2}+\mu\right)+\cdots,$$

由此求得

$$\lambda=\frac{\Delta t}{2}+\cdots,$$

对于三角形（x，P，x+Δx）的面积S，得到表达式

$$2S=(\mathbf{x}\mathbf{P},\ \Delta\mathbf{x})=\frac{\Delta t^3}{4}(\dot{\mathbf{x}},\ \ddot{\mathbf{x}})+\cdots,$$

因而

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt[3]{8S}}{\Delta\sigma}=1, \tag{1.13}$$

这给出仿射弧素的几何意义。

其次，为了给出仿射法线的几何解释，先来求出 $\mathbf{x}(\sigma)$ 在某点（比如 $\sigma=0$）邻域中的展开式。在曲线C上一点 $\mathbf{x}(0)$ 的活动标架可以取作固定仿射坐标系。这时

$$\mathbf{e}_1=\mathbf{a}_1(0),\ \ \mathbf{e}_2=\mathbf{a}_2(0),$$
$$\mathbf{x}(0)=0,\ \ \mathbf{x}'(0)=\mathbf{e}_1,\ \ \mathbf{x}''(0)=\mathbf{e}_2,\ \ \mathbf{x}'''(0)=-\kappa_0\mathbf{e}_1.$$

所以曲线 $\mathbf{x}(\sigma)$ 在 $\mathbf{x}(0)$ 的邻域中的展开式为

$$\mathbf{x}(\sigma)=\sigma\mathbf{e}_1+\frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{e}_2-\frac{\kappa_0}{6}\sigma^3\mathbf{e}_1-\frac{\sigma^4}{24}(\kappa_0'\mathbf{e}_1-\kappa_0\mathbf{e}_2)+\cdots. \tag{1.14}$$

选取 x_1轴和 x_2轴为坐标轴，它们是由 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 决定的，我们得到

$$x_1=\sigma-\frac{\kappa_0}{6}\sigma^3-\frac{\kappa_0'}{24}\sigma^4+\cdots,$$
$$x_2=\frac{\sigma^2}{2}-\frac{1}{24}\kappa_0\sigma^4+\cdots, \tag{1.14$'$}$$

从此消去σ，便得曲线 $\mathbf{x}(\sigma)$ 的方程取如下的形式：

$$x_2=\frac{x_1^2}{2}+\frac{\kappa_0}{8}x_1^4+\cdots, \tag{1.14$''$}$$

因此，抛物线

$$y(\sigma)=\sigma e_1+\frac{1}{2}\sigma^2 e_2 \text{ 或 } x_2=\frac{x_1^2}{2}$$

与曲线 $x(\sigma)$在 $\sigma=0$ 至少构成三阶接触，称它为 $x(\sigma)$ 在 x_0的密切抛物线，从方程

$$x_2=\frac{x_1^2}{2}$$

可知，它的轴是通过 $x(0)$ 的 x_2轴，于是我们有

定理3.3 曲线C在 x 的仿射法线是C在这点的密切抛物线的轴。

我们也看到，当 $\kappa>0$ 时，曲线C在其上某点邻域内的点落在密切抛物线内部，当 $\kappa<0$ 时，落在它的外部。这给出 κ 的符号的解释。

若一条二次曲线 $y(\sigma)$ 的曲率 $\kappa_c=\kappa_0$ 并与 $x(\sigma)$ 在 $x(0)$ 相切：

$$y(0)=x(0),\quad y'(0)=x'(0),$$

则由方程（1.14）可知，$y(\sigma)$ 与 $x(\sigma)$ 构成阶$\geqslant 4$ 的接触，则称 y 是 x 在 $x(0)$ 的超密切二次曲线。若超密切二次曲线是一椭圆、一抛物线或一双曲线，则 x 称为在一点有椭圆、抛物或双曲曲率（$\kappa \gtreqless 0$）。

顺便指出，抛物线的特征是仿射曲率等于零。事实上，由基本方程（1.11）可见，这时 $x'''=0$，所以

$$x=\frac{a}{2}\sigma^2+b\sigma+c,$$

其中 a，b，c 是定向量。这就是抛物线的方程。

现在要考虑仿射曲率 κ 为不等于零的常数的曲线。为此，把方程（1.11）：

$$x'''+\kappa x'=0\text{，其中}\|x',\ x''\|=1,$$

求积分。这里应当分为两个情形。假设 a, b, c 为定向量，则有：

当 $\kappa>0$ 时，$x=a\cos\sqrt{\kappa}\,\sigma+b\sin\sqrt{\kappa}\,\sigma+c$，而且$\|a,\ b\|\kappa^{3/2}=1$；

当 $\kappa<0$ 时，$x=a\,\mathrm{ch}\sqrt{-\kappa}\,\sigma+b\,\mathrm{sh}\sqrt{-\kappa}\,\sigma+c$，而且$|a,\ b|(-\kappa)^{3/2}=-1$。

或即

当 $\kappa>0$ 时，$x-c=a\cos\sqrt{\kappa}\,\sigma+b\sin\sqrt{\kappa}\,\sigma$，

当 $\kappa<0$ 时，$x-c=a\,\mathrm{ch}\sqrt{-\kappa}\,\sigma+b\,\mathrm{sh}\sqrt{-\kappa}\,\sigma$。

前者是以 c 为中心，a 和 b 为共轭半轴的椭圆；它的面积为 $\pi|a,\ b|=\pi\kappa^{-3/2}$，这给出仿射曲率的解释；后者为双曲线，它以 a，b 为共轭半直径，在任意共轭半直径上所构成的平行四边形的面积等于 $(-\kappa)^{-3/2}$。

仿射法线通过二次曲线的中心。

综合以上的讨论，我们有

定理3.4 仿射曲率等于常数的平面曲线是二次曲线。

3. 六切点

定义 若在 C^4曲线上一点的仿射曲率有一个相对极值，则称该点为曲线的一个六切点。

这个概念将在下面所述的与四顶点定理的一个类似定理中看到：

定理3.5 一条 C^4凸闭曲线至少有六个六切点。

这个定理的证明与§2.1中所述的四顶点定理的最后证明是平行的。先来证明

引理3.6 对任何一个常系数二次多项式$Q(x_1,\ x_2)$和任何一条 C^4闭曲线 x，$\oint Q(x_1,\ x_2)d\kappa=0$。

我们必须证明

$$\oint d\kappa=\oint x_1 d\kappa=\oint x_2 d\kappa=\oint x_1^2 d\kappa=\oint x_1x_2 d\kappa=\oint x_2^2 d\kappa=0.$$

第一个积分显然等于零。其余的积分经过分部积分转化为微分的积分，例如，

$$\oint x_1 d\kappa=-\oint \kappa x_1' d\sigma=\oint x_1''' d\sigma=\oint dx_1''=0,$$

$$\oint x_1^2 d\kappa = -2\oint \kappa x_1 x_1' d\sigma = 2\oint x_1 x_1''' d\sigma = -2\oint x_1' x_1'' d\sigma$$

$$= -\oint d\,(x_1')^2 = 0.$$

引用对四顶点定理的最后证明，引理蕴涵着至少存在四个六切点。如果只有四个，按循环次序以 P_1，P_2，P_3，P_4表示它们，我们可以假定 κ 在 P_1和 P_3是极大，在 P_2, P_4 为极小。$L_1(x_1, x_2)=0$ 是直线 P_1P_3的方程，并假定 $L_1(P_2)>0$。又，令 $L_2(x_1, x_2)=0$ 为直线 P_2P_4的方程，$L_2(P_1)<0$。在曲线上

$$\operatorname{sgn} L_1L_2 = \operatorname{sgn} d\kappa.$$

从此$\oint L_1L_2 d\kappa>0$。这与引理 3.6 相矛盾。

作为仿射几何的最后一个问题，我们寻求单参数么模仿射变换群

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0 A(t_0),\quad |A(t)|=1$$

的轨线。这样一轨线经过群的变换变到它自身。在这种变换过程中，仿射曲率保留不变。它沿任何一轨线（如果它总有定义的）必须是常数，故有

定理3.7 一个单参数么模仿射变换群的轨线是二次曲线或直线。

在仿射几何中，对具有变曲点的弧不能直接地论述，必须把它们分为局部地凸弧。一般来讲，甚至对解析曲线在一变曲点的活动标架没有连续性。

下列命题给读者作为练习。

1° 证明一曲线可以从它的曲率经过 $\mathbf{t}=\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}$，$\mathbf{t}''=-\kappa\mathbf{t}$ 的积分而得到。求自然方程为 $\kappa=\sigma$ 的曲线。（微分方程是可以积分的，用$\pm\frac{1}{3}$级的 Bessel 函数表达。）

2° $\mathbf{x}$ 的仿射渐屈线 $\mathbf{A}_x$ 是仿射法线$\mathbf{A}_x(\sigma)=\mathbf{x}(\sigma)+\lambda\mathbf{x}''(\sigma)$的包络线。证明$\lambda(\sigma)=\kappa(\sigma)^{-1}$。抛物线为什么没有一条仿射渐屈线？

3° 证明一 C^4 曲线是一二次曲线，当且只当它的一切仿射法线是平行的或共点的.（应用第 1° 或 2° 题.）

4° 证明任何两条抛物线是互为么模仿射象。

5° 一个一般仿射变换

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}M + \mathbf{b}, \quad \|M\| > 0$$

可以看作一个么模仿射变换与比是$\|M\|$的一个位似变换之积. 证明一般仿射变换有四点不变量和一个五阶微分不变量。求四点不变量.（提示：面积在一位似变换下是怎样变更的？）

6° 在一个位似变换下，向量的长是乘位似变换的比$\|M\|$. 在一般仿射变换下，证明σ，κ，κ'是分别乘$\|M\|^{2/3}$，$\|M\|^{-4/3}$，$\|M\|^{-2}$，所以$\mu = \kappa' \kappa^{-3/2}$是一般仿射变换的五阶微分不变量.

7° 令$\mathbf{q}(\sigma)$是一凸弧，它在端点A，B有相同的超密切二次曲线C。证明$\mathbf{q}$至少有五个六切点（Fabricius-Bjerre）。

8° 令$\mathbf{q}(\sigma)$是一条凸闭曲线，它有一条二次曲线C作为在两不同点的超密切二次曲线。证明$\mathbf{q}$至少有 10 个六切点（Fabricius-Bjerre）。（应用第 7° 题.）

9° 一曲线是抛物型凸曲线，如果在它的每点的邻域里，它是包含在该点的密切抛物线的内部，证明一凸闭抛物 C^4 曲线与它的任何一条密切二次曲线只在密切点相交（Carteman）。

10° 证明一条密切抛物线（它不是超密切的）在切点与曲线相交。〔讨论在（1.14）中 $x_{2曲线} - x_{2抛物线}$ 的符号.〕

11° 证明一条超密切椭圆或双曲线在切点与曲线决不相交，除非该点是六切点.（对 C^5曲线应用（1.14）。）

12° 仿射法线的另一几何意义. 设Γ为平行于平面曲线C在点$\mathbf{x}(0)$的切线的一系弦的中点的轨迹，则仿射法线是Γ在$\mathbf{x}(C)$的切线。

§3.2. 空间曲线的仿射微分几何

本节研究三维空间中曲线在么模（等积）仿射变换群之下的

不变性质，这个空间记为 A^3。A^3 中保持体积不变的仿射变换可写为如下的形式：

$$\begin{aligned} x_1^* &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1, \\ x_2^* &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2, \\ x_3^* &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = 1, \tag{2.1}$$

或即

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}A + \mathbf{b}, \tag{2.1$'$}$$

式中

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 1, \quad \mathbf{b} = \{b_1, \ b_2, \ b_3\}.$$

由此可见，A^3 中么模仿射群具有 11 个参数。

与平面曲线的情形一样，要寻求与曲线有密切联系的标架、不变参数与不变量。

1. 活动标架 设 O 为 A^3 中一个固定点，以 $\mathbf{x}$ 表示向量 OX，引用与 $\mathbf{x}$ 有同一起点的三个向量 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 组成的公共标架，使得以 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ 为棱的平行六面体的体积 $\|\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_3\| = 1$。标架的位移决定于方程：

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2 + \omega^3\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_1 &= \omega_1^1\mathbf{e}_1 + \omega_1^2\mathbf{e}_2 + \omega_1^3\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_2 &= \omega_2^1\mathbf{e}_1 + \omega_2^2\mathbf{e}_2 + \omega_2^3\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_3 &= \omega_3^1\mathbf{e}_1 + \omega_3^2\mathbf{e}_2 + \omega_3^3\mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{2.2}$$

把 $\|\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_3\| = 1$ 微分，并应用 (2.2)，就可导出 $\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0$，这时空间的结构方程有如下的形式：

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^k \wedge \omega_k^i, \\ & \qquad (i, \ j = 1, \ 2, \ 3) \\ d\omega_j^i &= \omega_j^k \wedge \omega_k^i. \end{aligned} \tag{2.3}$$

现在考虑一条空间曲线 C：

$$\mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{2.4}$$

并在 C 上每点作一个标架 $\{\mathbf{a}_1, \ \mathbf{a}_2, \ \mathbf{a}_3\}$，使得 $\mathbf{a}_1$ 为 C 在该点的切

向量和标架矩阵$A(t)$,

$$\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \mathbf{a}_3(t)\} = A(t)\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \tag{2.5}$$

是在SL_3中，$|A(t)|=1$。与平面曲线的情形一样，若$\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\ddot{\mathbf{x}}(t)$, $\dddot{\mathbf{x}}(t)$ 是线性无关的；我们不妨假定$|\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \dddot{\mathbf{x}}(t)|>0$，并取

$$\mathbf{a}_1 = \|\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \dddot{\mathbf{x}}(t)\|^{-1/3}\dot{\mathbf{x}}(t),$$

$$\mathbf{a}_2 = \|\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \dddot{\mathbf{x}}(t)\|^{-1/3}\ddot{\mathbf{x}}(t),$$

$$\mathbf{a}_3 = \|\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \dddot{\mathbf{x}}(t)\|^{-1/3}\dddot{\mathbf{x}}(t),$$

则由这三个向量决定的平行六面体的体积$\|\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \mathbf{a}_3(t)\|=1$；(2.5) 中的标架矩阵

$$A(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}}\|^{1/3}}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 \\ \dddot{x}_1 & \dddot{x}_2 & \dddot{x}_3 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

是么模仿射的。曲线C的仿射弧长也和平面曲线的情形相仿，是由

$$\left\|\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}, \frac{d^2\mathbf{x}}{d\sigma^2}, \frac{d^3\mathbf{x}}{d\sigma^3}\right\| = 1 \tag{2.7}$$

来定义的，导数$\frac{dt}{d\sigma}$是从

$$\|\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}}\| = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^6$$

来计算的，从此得到不变参数

$$\sigma = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}}\|^{1/6} dt. \tag{2.8}$$

关于σ的导数仍以撇表示，则有

$$\|\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}'''\| = 1, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{x}', \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{x}'', \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{x}'''.$$

沿方向a_2的直线称为曲线C的仿射主法线，沿方向a_3的直线称为C的仿射副法线，其中第一条落在密切平面上。这时活动标架矩阵

$$A(\sigma)=\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{pmatrix}.$$

按照§3.1的方法容易导出

$$C(A)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \|\mathrm{x}'',\ \mathrm{x}''',\ \mathrm{x}^{\mathrm{IV}}\| & -\|\mathrm{x}',\mathrm{x}''',\ \mathrm{x}^{\mathrm{IV}}\| & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

这个矩阵由第三行两个元素可以完全决定，所以是两个不变量，令

$$k_1(\sigma)=\|\mathrm{x}'',\ \mathrm{x}''',\ \mathrm{x}^{\mathrm{IV}}\|,\quad k_2(\sigma)=-\|\mathrm{x}',\ \mathrm{x}''',\ \mathrm{x}^{\mathrm{IV}}\|, \quad (2.10)$$

$k_1(\sigma)$ 和 $k_2(\sigma)$ 称为曲线 $\mathrm{x}(\sigma)$ 的**仿射曲率**。$k_1(\sigma)$ 又称为曲线的**仿射挠率**。在 $k_1(\sigma)$，$k_2(\sigma)$ 的计算中包含 $\mathrm{x}^{\mathrm{IV}}=\frac{d^3}{d\sigma^3}\left(\dot{x}\frac{dt}{d\sigma}\right)$。这是包含 $\frac{dt}{d\sigma}$ 的三阶导数的一个表达式，但是 $\frac{d\sigma}{dt}=\|\dot{\mathrm{x}}\ \ddot{\mathrm{x}}\ \dddot{\mathrm{x}}\|^{1/6}$，因而这个表达式包含 x 关于一般参数 t 的六阶导数。所以不变量 k_1，k_2是六阶的。

这时空间曲线 $\mathrm{x}(\sigma)$ 的 Frenet 方程

$$\{\mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_2,\ \mathrm{a}_3\}'=C(A)\{\mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_2,\ \mathrm{a}_3\}$$

可写为

$$\frac{d\mathrm{x}}{d\sigma}=\mathrm{a}_1,$$

$$\frac{d\mathrm{a}_1}{d\sigma}=\mathrm{a}_2,$$

$$\frac{d\mathrm{a}_2}{d\sigma}=\mathrm{a}_3,$$

$$\frac{d\mathrm{a}_3}{d\sigma}=k_1\mathrm{a}_1+k_2\mathrm{a}_2. \quad (2.11)$$

以 $\mathrm{a}_2=\mathrm{x}''$，$\mathrm{a}_1=\mathrm{x}'$ 代入最后一式得到曲线 $\mathrm{x}(\sigma)$ 所满足的**基本方程**

$$\mathbf{x}^{\mathrm{IV}}-k_2\mathbf{x}''-k_1\mathbf{x}'=0. \tag{2.12}$$

这样，从定理 1.18 和 1.19 可知，当 $k_1(\sigma)$，$k_2(\sigma)$ 给定时，则可作出 $A(\sigma)$ 的结构和 $\mathbf{x}(\sigma)$。因此得到仿射空间曲线的基本定理：

定理3.8 一条空间曲线除了一个么模仿射变换外，由它的仿射曲率 $k_1(\sigma)$，$k_2(\sigma)$ 作为仿射弧长 σ 的函数的自然方程 $k_1=k_1(\sigma)$，$k_2=k_2(\sigma)$ 唯一地确定。

上面已经指出，k_1，k_2关于一般参数 t 是六阶不变量。我们需要计算一个最低阶标架的构造。

不变量 k_1，k_2从标架向量可以得到：

$$\mathbf{a}_1=\mathbf{x}'=\dot{\mathbf{x}}\frac{dt}{d\sigma},$$

$$\mathbf{a}_2=\mathbf{x}''=\ddot{\mathbf{x}}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2+\dot{\mathbf{x}}\frac{d^2t}{d\sigma^2},$$

$$\mathbf{a}_3=\mathbf{x}'''=\dddot{\mathbf{x}}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^3+3\ddot{\mathbf{x}}\frac{dt}{d\sigma}\frac{d^2t}{d\sigma^2}+\mathbf{x}\left(\frac{d^3t}{d\sigma^3}\right),$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{IV}}=\overset{(4)}{\mathbf{x}}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^4+6\dddot{\mathbf{x}}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2\frac{d^2t}{d\sigma^2}$$
$$+\ddot{\mathbf{x}}\left[3\left(\frac{d^2t}{d\sigma^2}\right)^2+4\frac{dt}{d\sigma}\frac{d^3t}{d\sigma^3}\right]+\dot{\mathbf{x}}\frac{d^4t}{d\sigma^4}.$$

从此便得

$$k_2=\|\mathbf{x}',\ \mathbf{x}^{\mathrm{IV}},\ \mathbf{x}'''\|=\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\left[4\frac{d^3t}{d\sigma^3}-15\frac{d\sigma}{dt}\left(\frac{d^2t}{d\sigma^2}\right)^2\right]$$
$$-|\dot{\mathbf{x}},\ \dddot{\mathbf{x}},\ \overset{(4)}{\mathbf{x}}|\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^8. \tag{2.13}$$

由此可以看出 k_2是一个五阶不变量，而

$$k_1=\|\mathbf{x}'',\ \mathbf{x}''',\ \mathbf{x}^{\mathrm{IV}}\|=\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^3\left[15\left(\frac{d^2t}{d\sigma^2}\right)^3\right.$$
$$\left.-10\frac{dt}{d\sigma}\frac{d^2t}{d\sigma^2}\frac{d^3t}{d\sigma^3}\right]+\|\dot{\mathbf{x}},\ \dddot{\mathbf{x}},\ \overset{(4)}{\mathbf{x}}\|\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^7\frac{d^2t}{d\sigma^2}$$
$$+\|\ddot{\mathbf{x}},\ \dddot{\mathbf{x}},\ \overset{(4)}{\mathbf{x}}\|\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^9$$
$$+3\|\dot{\mathbf{x}},\ \ddot{\mathbf{x}},\ \overset{(4)}{\mathbf{x}}\|\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^5\left(\frac{d^2t}{d\sigma^2}\right)^2+\frac{d\sigma}{dt}\frac{d^4t}{d\sigma^4} \tag{2.14}$$

是一个六阶不变量．我们看到 a_3 中最高阶（五阶）的项是$\dot{x}\frac{d^3t}{d\sigma^3}=a_1\frac{d\sigma}{dt}\frac{d^3t}{d\sigma^3}$，从此，向量

$$y_3=-\frac{k_2}{4}a_1+a_3=\dddot{x}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^3+3\ddot{x}\frac{dt}{d\sigma}\frac{d^2t}{d\sigma^2}$$
$$+\dot{x}\left[\frac{15}{4}\frac{d\sigma}{dt}\left(\frac{d^2t}{d\sigma^2}\right)^2+\frac{1}{4}\|\dot{x},\ \ddot{x},\ \overset{(4)}{x}\|\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^9\right]$$

只是四阶，所以

$$y_1=a_1,$$
$$y_2=a_2,$$
$$y_3=-\frac{k_2}{4}a_1+a_3$$

是一个四阶的不变活动标架，此外

$$y_3'=\left(k_1-\frac{1}{4}k_2'\right)a_1+\frac{3k_2}{4}a_2,$$

式中 a_1 的系数（包含六阶导数的两个函数之差）只是五阶。

令 $\kappa_1=k_1-\frac{1}{4}k_2'$，则从（2.13）和（2.14）求得

$$\kappa_1=15\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^3\left(\frac{d^2t}{d\sigma^2}\right)^3-\frac{5}{2}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\frac{d^2\sigma}{dt^2}\frac{d^3t}{d\sigma^3}$$
$$-\frac{dt}{d\sigma}\frac{d^2\sigma}{dt^2}\frac{d^3t}{d\sigma^3}+\frac{1}{4}\left[\|\ddot{x},\ \dddot{x},\ \overset{(4)}{x}\|+\|\dot{x},\ \ddot{x},\ \overset{(5)}{x}\|\right]$$
$$\times\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^9+2\|\dot{x},\ \dddot{x},\ \overset{(4)}{x}\|\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^7\frac{d^2t}{d\sigma^2}.$$

再令

$$\kappa_2=\frac{1}{4}k_2,$$

则在幺模仿射几何中关于空间曲线的最低阶不变量出现在

$$\{y_1,\ y_2,\ y_3\}'=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -\kappa_2 & 0 & 1\\ \kappa_1 & 3\kappa_2 & 0\end{pmatrix}\{y_1,\ y_2,\ y_3\}\qquad(2.15)$$

中．这个构造用到六阶导数；对 C^6 曲线是成立的．按照我们的

处理方法，现在需要构造 C^6 曲线的五阶的微分不变量。

象在欧氏几何中一样，对 C^5曲线可以求出一个五阶标架，如果我们只寻找 Cartan 矩阵，它们的元素除一可加常数（积分不变量）外是固定的。那末标架自身不是唯一的，但是只差一个常数么模仿射变换。从导致（2.15）的构造，引起来寻找一个适当的标架$\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$，它是由下面的关系从$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$导出的。

$$\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a & 0 & 1\end{pmatrix}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}.$$

引用方程（1.6.7），新标架的 Cartan 矩阵变为

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -a & 0 & 1\\ a'+k_1 & a+k_2 & 0\end{pmatrix},$$

从此对于具有 Cartan 矩阵

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ q_1 & 0 & 1\\ 0 & q_2 & 0\end{pmatrix},\quad q_1+q_2=k_2,\quad q_1'=-k_1 \tag{2.16}$$

的一个标架得到 a 的决定：

$$a=-\int k_1 d\sigma=-\int \|d\mathbf{x}''', \mathbf{x}'', \mathbf{x}'''\|.$$

2. 定值仿射曲率的曲线 由方程（2.12）可知，在 A^3中，k_1，k_2等于零的曲线是 $\mathbf{a}_3'=\mathbf{x}^{\mathrm{IV}}=0$ 的积分曲线，它们是三次空间曲线 $\mathbf{x}=\mathbf{a}\sigma^3+\mathbf{b}\sigma^2+\mathbf{c}\sigma+\mathbf{d}$.（一切二次曲线是平面曲线，于是从三维的理论中应除外。）

单参数么模仿射变换群的轨线是仿射曲率 k_i 为常数的曲线。它们是

$$\mathbf{x}^{\mathrm{IV}}-k_2\mathbf{x}''-k_1\mathbf{x}'=0 \tag{2.17}$$

的积分曲线。这个常系数向量微分方程的解依赖于它的特征方程

$$r^3-k_2r-k_1=0. \tag{2.18}$$

Ⅰ. $k_1\neq 0$.

A．若（2.18）有三个不同的根r_1, r_2, r_3，则（2.17）的一个特殊解是

$$\mathbf{x}'=(ar_1e^{r_1\sigma}, br_2e^{r_2\sigma}, cr_3e^{r_3\sigma}), \quad r_1+r_2+r_3=0,$$

或即

$$\mathbf{x}=(ae^{r_1\sigma}, be^{r_2\sigma}, ce^{r_3\sigma}),$$

条件$|\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}'''|=1$是$abck_1(4k_2^3-27k_1^3)=1$。曲线是完全在下面的三次曲面上：

$$x_1x_2x_3=\frac{1}{k_1(4k_2^3-27k_1^2)}.$$

B．若（2.18）有一个重根，则$\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}'''$不能是线性无关。这个情形，要把$4k_2-27k_1^2=0$除外。

C．若（2.18）只有一个实根r_1，其它两个根是

$$r_2=m_1+im_2, \quad r_3=m_1-im_2.$$

（2.17）的一个特殊解是

$$\mathbf{x}=(ae^{r_1\sigma}, be^{m_1\sigma}\cos m_2\sigma, ce^{m_1\sigma}\sin m_2\sigma),$$

式中

$$r_1+2m_1=0,$$

$$abcr_1m_1[(m_1^2+m_2^2)^2+r_1(m_1-m_2)^2-2r_1m_1^3]=1.$$

Ⅱ．$k_1=0$。

A．$k_2>0$。（2.17）的一个解是

$$\mathbf{x}=\frac{1}{k_2}(\sinh k_2^{1/2}\sigma, \ \cosh k_2^{1/2}\sigma, \ k_2^{1/2}\sigma).$$

B．$k_2<0$。

$$\mathbf{x}=-\frac{1}{k_2}(\sin(-k_2)^{1/2}\sigma, \ \cos(-k_2)^{1/2}\sigma, \ (-k_2)^{1/2}\sigma).$$

因为不变量除一么模仿射变换外刻划曲线，（2.17）的一个特殊解同一般情形起同样的作用。

3．m维仿射空间中的曲线　设A^m为m维仿射空间，坐标为$x^1, \cdots, x^m$。A^m中么模仿射变换是

$$x^{*\alpha}=a_\beta^\alpha x^\beta+b^\alpha, \ 1\leqslant\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \cdots\leqslant m, \ \det(a_\beta^\alpha)=1, \tag{2.19}$$

或即

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}A + b, \quad \|A\| = 1. \tag{2.19)'}$$

这个幺模变换群有m^2+m-1个参数。按照§3.1所讨论的理由，本段只论述 A^m 中这样的曲线 $\mathbf{x}(t)$，使得在一切点处，

$$\|\dot{\mathbf{x}}(t), \cdots, \overset{(m)}{\mathbf{x}}\| \neq 0.$$

由

$$\left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}, \frac{d^2\mathbf{x}}{d\sigma^2}, \cdots, \frac{d^m\mathbf{x}}{d\sigma^m} \right\| = \pm 1 \tag{2.20}$$

定义不变参数σ，称为仿射弧长。

幺模仿射不变量按照§3.1的方法可以得到。固定坐标系由标准标架$\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_m\}$给定。沿曲线$\mathbf{x}(t)$的活动标架由向量$\mathbf{a}_i = \frac{d^i\mathbf{x}}{d\sigma^i}$ ($i=1, \cdots, m$) 构成。$\mathbf{a}_i$是不变的，它们是线性无关的，并由方程 (2.20)，它们张成一个m维体积1。标架矩阵$A(\sigma)$

$$\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_m\} = A(\sigma)\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_m\}$$

是幺模的。$C(A)$ 是迹等于零的矩阵，由定义，

$$\mathbf{a}_i' = \mathbf{a}_{i+1}, \quad i < m.$$

从此

$$C(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 & & \cdots\cdots & k_{m-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

所以k_i ($1 \leqslant i \leqslant m-1$) 是$m-1$个不变量，除了一个定值幺模仿射变换外，这些不变量刻划曲线$\mathbf{x}(\sigma)$，对

$$k_i = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}, \cdots, \frac{d^{i-1}\mathbf{x}}{d\sigma^{i-1}}, \frac{d^{m+1}\mathbf{x}}{d\sigma^{m+1}}, \frac{d^{i+1}\mathbf{x}}{d\sigma^{i+1}}, \cdots, \frac{d^m\mathbf{x}}{d\sigma^m} \right\|$$

的计算包含$\frac{d^{m+1}\mathbf{x}}{d\sigma^{m+1}} = \frac{d^m\left(\dot{\mathbf{x}}\frac{dt}{d\sigma}\right)}{d\sigma^m}$的计算。这是包含$\frac{dt}{d\sigma}$的$m$阶

导数的一个表达式，从而包含 x 的 $2m$ 阶导数，所以 k_i 是 $2m$ 阶不变量。对于一个最低阶标架所需要的计算是很复杂的。这里从略。对于 $m=3$ 的情形已在上一段做过。

下列命题让读者作为练习：

1° 在 x_0 处的活动标架中，求出一空间曲线以 x_1 作为参数的 $x_2(x_1)$，$x_3(x_1)$ 的泰勒展开式中第一项。证明在 A^3 中一条空间曲线在每点有一条密切三次挠曲线。

2° 证明仿射曲率 k_i 是常数，当只当存在常数 α，β，γ 和一个常向量 q，使得

$$x(t)+\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)+\gamma y_3(t)=q.$$

3° 求 $\beta=0$（第 2° 题）的曲线。

4° 求单参数群，它们有带定值仿射曲率曲线作为轨线。证明单参数群完全决定于不变量，如果至少有一不变量 $\neq 0$。

5° 应用第 4° 题，求出 A^3 中在一个双参数么模仿射变换群下一切不变的空间曲线。

6° 求 a_3 有定方向的一切曲线。

7° 寻求 A^4 中仿射曲率等于零的曲线。

§3.3. 曲面的仿射微分几何

1. Frenet 公式 本节着重研究在三维空间 A^3 中么模仿射群：

$$x^*=xA+a,\ \|A\|=1$$

之下曲面 M 的不变性质。最后简略地介绍 n 维仿射空间 A^n 中的曲面论。设 $r(u^1, u^2)$ 表示曲面 $M\subset A^3$ 的位置向量，令 r, e_1, e_2, e_3 是 M 上一个仿射标架，使得 e_1，e_2 在 r 切于 M，并且

$$\|e_1,\ e_2,\ e_3\|=1. \tag{3.1}$$

这样，我们可以写出 Frenet 标架的位移公式如下：

$$dr=\omega^1 e_1+\omega^2 e_2, \tag{3.2}$$

$$d\{e_i\}=(\omega_i^j)\{e_j\}, \tag{3.3}$$

这称为 Frenet 公式。

这把 (3.1) 求导，然后应用 (3.2) 即得

$$\omega_i^i = 0. \tag{3.4}$$

可积条件 $d(d\mathbf{r}) = d(d\mathbf{e}) = 0$ 是

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha \ (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{3.5}$$

$$0 = \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3, \tag{3.5$'$}$$

$$d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{3.5$''$}$$

把 Cartan 引理应用到 (3.5)′，则有一个对称矩阵 $(l_{\alpha\beta})$，使得

$$(\omega_1^3,\ \omega_2^3) = (\omega^1,\ \omega^2)\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}.$$

如果考虑切面不动的一个么模变换来换标架：

$$\{\mathbf{e}_{i'}\} = \begin{pmatrix} e_{1'}^1 & e_{1'}^2 & 0 \\ e_{2'}^1 & e_{2'}^2 & 0 \\ e_{3'}^1 & e_{3'}^2 & e_{3'}^3 \end{pmatrix} \{\mathbf{e}_i\},\quad \|e_{i'}^j\| = 1, \tag{3.6}$$

则线性形式所受的变换为〔见方程(1.6.7)〕

$$(\omega^1,\ \omega^2) = (\omega^{1'},\ \omega^{2'})\begin{pmatrix} e_{1'}^1 & e_{1'}^2 \\ e_{2'}^1 & e_{2'}^2 \end{pmatrix} = (\omega^{\alpha'})E_{3'}^{3}{}^{[1]},$$

$$(\omega_{1'}^{3'}, \omega_{2'}^{3'}) = (\omega_1^3, \omega_2^3)E_{3'}^{3\,t} = (\omega^{1'}, \omega^{2'})E_{3'}^3(l_{\alpha\beta})E_{3'}^{3\,t}. \tag{3.7}$$

其余的形式变为复杂的表达式，现在不需要。因 $\|E_{3'}^3\| \neq 0$，从 (3.7) 的第二个方程推出

$$\operatorname{sgn}\|l_{\alpha\beta}\| = \operatorname{sgn}\|l_{\alpha'\beta'}\|$$

是一个仿射不变量。引用欧氏几何中的类似术语，我们把曲面上的点按这行列式的符号来分类：

椭圆点 $\|l_{\alpha\beta}\| > 0$，

双曲点 $\|l_{\alpha\beta}\| < 0$，

抛物点 $\|l_{\alpha\beta}\| = 0$。

在不同区域中，Frenet 公式也不同。

Ⅰ．**椭圆区域**．可以求出这样的变换矩阵，使得

$$(l_{\alpha'\beta'}) = E_{3'}^3(l_{\alpha\beta})E_{3'}^{3\,t} = U,$$

---

1) A_i^j 是元素 a_i^j 在矩阵 (a_i^j) 中的子式。

即

$$\omega_{1'}^{3'}=\omega^{1'},\quad \omega_{2'}^{3'}=\omega^{2'}. \tag{3.8}$$

使（3.8）保留不变的最一般么模变换（3.6）是使$E_{3'}^{3}$正交，因而$e_{3'}^{3}=1$。为了简化计算，我们先来研究特殊变换

$$\{e_{i''}\}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ e_{3''}^{1'} & e_{3''}^{2'} & 1\end{pmatrix}\{e_{i'}\}, \tag{3.9}$$

这里

$$\omega_{3''}^{3''}=\omega_{3'}^{3'}+e_{3''}^{1'}\omega^{1'}+e_{3''}^{2'}\omega^{2'}.$$

因为ω^{α}是切面T_r^*上一个基底，所以关于任一坐标系可写出

$$\omega_i^j=w_{i\alpha}^j\omega^{\alpha},$$

我们可以适当地选取唯一的向量场$e_{3''}$使

$$\omega_{3''}^{3''}=0.$$

这使$e_{3''}^{1'}=-w_{3'1'}{}^{3'}$，$e_{3''}^{2'}=-w_{3'2'}{}^{3'}$可以得到。在这个选择下，通过r而沿方向$e_{3''}$的直线称为曲面在r的仿射法线。由方程（3.4），关于新标架，$\omega_{1''}^{1''}=-\omega_{2''}^{2''}$。由方程（3.8），$d\omega_{\alpha''}^{3''}=d\omega^{\alpha''}$（$\alpha''=1''$，$2''$）。比较可积条件（3.5）和（3.5）$''$，给出

$$\begin{aligned}&2w_{1''2''}{}^{1''}-(w_{1''1''}{}^{2''}+w_{2''1''}{}^{1''})=0,\\ &2w_{1''1''}{}^{1''}+w_{1''2''}{}^{2''}+w_{2''2''}{}^{1''}=0.\end{aligned} \tag{3.10}$$

剩下的可容许变换只是

$$\{a_i\}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\{e_{i''}\}. \tag{3.11}$$

从此，由（1.6.7）和（3.10），得到，

$$\begin{aligned}\pi_1^1=&\left(w_{1''1''}{}^{1''}\cos3\theta+\frac{1}{2}w_{1''2''}{}^{1''}\sin3\theta\right)\pi^1\\ &+\left(w_{1''2''}{}^{1''}\cos3\theta-\frac{1}{2}w_{1''1''}{}^{1''}\sin3\theta\right)\pi^2,\end{aligned}$$

如果再用π^{α}和$\pi_i^j=p_{i\alpha}{}^j\pi^{\alpha}$表示属于不变标架$\{a_i\}$的线性形式。为了唯一地确定标架$\{a_i\}$，选取$\theta$，使

$$\tan 3\theta = 2\frac{w_{1''2''1''}^{\ \ 1''}}{w_{1''1''1''}^{\ \ 1''}},$$

从此导出

$$\pi_1^1 = I\pi^1.$$

I 称为曲面的椭圆仿射曲率。若 $w_{1''2''}{}^{1''} = w_{1''1''}{}^{1''} = 0$，则 $I=0$，并且 $\{a_i\}$ 是不能确定的；这样的点叫做 Darboux 脐点。这个情形将在下面作详细的叙述。在非 Darboux 脐点处，θ 除 $\frac{\pi}{3}$ 的倍数外是决定的。故有三个 Darboux 方向。Darboux方向代替欧氏几何中的主方向。现在方程 (3.10) 化为 $\pi_1^2+\pi_2^1=-2I\pi^2$。方程 (3.5)″ 化为 $d\pi_3^3=0=\pi_3^1\wedge\pi^1+\pi_3^2\wedge\pi^2$，这表明 $P_{32}^1=P_{31}^2$。因为标架现在已是按一个不变的方法定义好了，所以函数 I，P_{11}^2，P_{12}^2，P_{31}^1，P_{31}^2，P_{32}^2 都是不变量。

定理3.9 在一个椭圆区域中每点存在唯一的仿射法线(除了在 Darboux 脐点)，又三个 Darboux 方向中的两个方向与仿射法线一起决定一个不变标架，它的 Frenet 方程是

$$d\{a_i\} = \begin{pmatrix} I\pi^1 & \pi_1^2 & \pi^1 \\ \pi_2^1 & -I\pi^1 & \pi^2 \\ \pi_3^1 & \pi_3^2 & 0 \end{pmatrix}\{a_i\},$$

$$\pi_1^2+\pi_2^1=-2I\pi^2,\quad \pi_3^1\wedge\pi^1+\pi_3^2\wedge\pi^2=0.$$

可积条件 (3.5) 可写为不变导数的形式：

$$\begin{aligned}
&d\pi^1 = P_{11}^2\pi^1\wedge\pi^2,\quad d\pi^2=(P_{12}^2+I)\pi^1\wedge\pi^2,\\
&P_{31}^2 = P_{32}^1 = 3P_{11}^2 I - I_{,2},\\
&P_{32}^2 = P_{12}^2(P_{12}^2-I)+(P_{11}^2)^2+P_{12,1}^2-P_{11,2}^2,\\
&P_{31}^1 = (P_{12}^2+3I)(P_{12}^2+2I)+P_{12,1}^2-P_{11,2}^2+2I_{,1}, \qquad (3.12)\\
&P_{11}^2(P_{31}^1-P_{32}^2)+2P_{32}^1(P_{12}^2+2I)+P_{32,1}^1-P_{31,2}^1=0,\\
&P_{12}^2(P_{31}^1-P_{32}^2)-2P_{32}^1P_{11}^2+P_{32,2}^1-P_{32,1}^2=0.
\end{aligned}$$

这些方程表明，若给定 I 和 π^α，则可以计算一切不变量。那末只有最后两个方程是真正的相容性条件。以后再回到不变标架和不变量的实际的决定问题。

Ⅰ. 双曲区域。矩阵$(l_{\alpha\beta})$可以引用$E_{3}^{3'}(l_{\alpha\beta})E_{3}^{3'}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

或者$E_{3}^{3'}(l_{\alpha\beta})E_{3}^{3'}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$来标准化。第一个情形相当于椭圆区域的论述，但是它导致很复杂的计算，所以我们选取第二个方法，这是由

$$\omega_{1'}{}^{3'}=\omega^{2'},\quad \omega_{2'}{}^{3'}=\omega^{1'} \tag{3.13}$$

来刻划的。与上面一样，仿射法线是由一个变换（3.9）和条件$\omega_{3''}{}^{3''}=0$来定义的。从（3.13）和可积条件（3.5），我们得到

$$w_{1''2''}{}^{2''}=w_{2''1''}{}^{1''}=0。$$

使（3.13）和$e_{3''}$为不变的么模矩阵只是

$$\{a_i\}=\begin{pmatrix}t & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{t} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\{e_{i''}\}。$$

Cartan 矩阵变为

$$\begin{pmatrix}\pi_1^1 & \pi_1^2 & \pi^2\\ \pi_2^1 & -\pi_1^1 & \pi^1\\ \pi_3^1 & \pi_3^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{t} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{1''}{}^{1''} & \omega_{1''}{}^{2''} & \omega^{2''}\\ \omega_{2''}{}^{1''} & -\omega_{1''}{}^{1''} & \omega^{1''}\\ \omega_{3''}{}^{1''} & \omega_{3''}{}^{2''} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{t} & 0 & 0\\ 0 & t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$+\frac{dt}{t}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

从

$$\pi_1^2=t^3w_{1''1''}{}^{2''}\pi^1,\quad \pi_2^1=t^{-3}w_{2''2''}{}^{1''}\pi^2,$$

推出

$$P_{11}^2P_{22}^1=w_{1''1''}{}^{2''}w_{2''2''}{}^{1''}$$

是一个不变量，经过一个么模变换可以把a_1或a_2（和a_3）的方向变为它的反方向；因此可以选取标架，使得

$$P_{11}^2P_{22}^1=J^2>0。 \tag{3.14}$$

称J为曲面的双曲仿射曲率。如果$J\neq 0$，就取$t=\left(\frac{J}{P_{11}^{2}}\right)^{1/3}$得到$\pi_1^2=J\pi^1$，$\pi_2^1=J\pi^2$。对$J=0$的情形将在下面讨论。

定理3.10 在具有非零双曲型仿射曲率J的一双曲区域中，每点存在唯一的标架，它的Frenet方程是

$$d\{a_i\}=\begin{pmatrix}\pi_1^1 & J\pi^1 & \pi^2\\ J\pi^2 & -\pi_1^1 & \pi^1\\ \pi_3^1 & \pi_3^2 & 0\end{pmatrix}\{a_i\}.$$

可积条件(3.5)是

$$\begin{aligned}&d\pi^1=P_{12}^1\pi^1\wedge\pi^2,\quad d\pi^2=P_{11}^1\pi^1\wedge\pi^2,\\ &P_{31}^1=P_{32}^2=J^2-2P_{11}^1P_{12}^1+P_{11,2}^1-P_{12,1}^1,\\ &P_{31}^2=-3JP_{12}^1+J_{,2},\\ &P_{32}^1=3JP_{11}^1+J_{,1},\\ &P_{31}^2J-2P_{32}^1P_{11}^1+P_{31,2}^1-P_{32,1}^1=0,\\ &-P_{32}^1J-2P_{31}^2P_{12}^1+P_{31,1}^2-P_{32,1}^2=0.\end{aligned}\tag{3.15}$$

若给定π^1，π^2和J，并服从可积条件，则可决定标架和一切不变量。a_1和a_2的方向是曲面上的渐近方向(见§3.3)。

Ⅱ. 抛物区域。现在假定在曲面的某开集上$\|l_{\alpha\beta}\|=0$。我们不论述曲面上抛物曲线的情形，因为在仿射几何中，椭圆区域和双曲区域是完全不同的，不想按照一个连续的方法越过一条抛物曲线，能够把椭圆和双曲的标架联结起来。

考虑两个情形。

A. 若$l_{\alpha\beta}$都为零，则$\omega_1^3=\omega_2^3=0$。因而由(3.3)，有

$$de_1=\omega_1^1e_1+\omega_1^2e_2,\quad de_2=\omega_2^1e_1+\omega_2^2e_2.$$

由此可见，对一切点的切面是固定的，于是曲面是e_1和e_2的平面。

B. 若$(l_{\alpha\beta})$的秩是一，我们可以用

$$E_{3'}^{3}(l_{\alpha\beta})E_{3'}^{3t}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

即$\omega_{1'}^{3'}=0$和$\omega_{2'}^{3'}=\omega^{2'}$来标准化矩阵。可积条件

$$d\omega_{1'}{}^{3'} = 0 = \omega_{1'}{}^{2'} \wedge \omega^{2'}$$

表明 $\omega_{1'}{}^{2'} = w_{1'2'}{}^{2'}\omega^{2'}$。方程

$$\begin{aligned}
d\mathbf{r} &= \omega^{1'}\mathbf{e}_{1'} + \omega^{2'}\mathbf{e}_{2'},\\
d\mathbf{e}_{1'} &= \omega_{1'}{}^{1'}\mathbf{e}_{1'} + \omega_{1'2'}{}^{2'}\omega^{2'}\mathbf{e}_{2'},\\
d\mathbf{e}_{2'} &= \omega_{2'}{}^{1'}\mathbf{e}_{1'} + \omega_{2'}{}^{2'}\mathbf{e}_{2'} + \omega^{2'}\mathbf{e}_{3'},
\end{aligned}$$

沿曲线 $\omega^{2'} = 0$ 化为

$$\begin{aligned}
d\mathbf{r} &= \omega^{1'}\mathbf{e}_{1'},\\
d\mathbf{e}_{1'} &= \omega_{1'}{}^{1'}\mathbf{e}_{1'},\\
d\mathbf{e}_{2'} &= \omega_{2'}{}^{1'}\mathbf{e}_{1'} + \omega_{2'}{}^{2'}\mathbf{e}_{2'}.
\end{aligned}$$

曲线 $\omega^{2'} = 0$ 是直线，因为它们的切线 $\mathbf{e}_{1'}$ 的方向固定。此外，因为 $d\mathbf{e}_{1'}$，$d\mathbf{e}_{2'}$ 为 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ 的线性组合，故沿方向 $\mathbf{e}_{1'}$ 的这一母线的切面 $\mathbf{e}_{1'}$，$\mathbf{e}_{2'}$ 是固定的。因而便有

定理3.11　抛物型曲面是可展曲面。

（1）若 $w_{1'2'}{}^{2'} = 0$，则 $\mathbf{e}_1$ 的方向在曲面上是固定的。一切母线是平行的，于是曲面是一**柱面**。

（2）若 $w_{1'2'}{}^{2'} \neq 0$，则标架的可容许变换是么模矩阵

$$\begin{pmatrix} e_{1''}{}^{1'} & 0 & 0 \\ e_{2''}{}^{1'} & e_{2''}{}^{2'} & 0 \\ e_{3''}{}^{1'} & e_{3''}{}^{2'} & e_{3''}{}^{3'} \end{pmatrix}.$$

我们首先研究

$$\{\mathbf{e}_{i''}\} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\{\mathbf{e}_{i'}\}$$

的影响，这里 $\omega_{1''}{}^{2''} = t^3 w_{1'2'}{}^{2'}\omega^{2''}$。取 t 使

$$t^3 = (w_{1'2'}{}^{2'})^{-1},$$

就有标准化

$$\omega_{1''}{}^{2''} = \omega^{2''}.$$

对于 $d\omega^{2''} = d\omega_{1''}{}^{2''} = d\omega_{2''}{}^{3''}$ 的可积条件是

$$(\omega_{1''}{}^{1''} - \omega^{1''}) \wedge \omega^{2''} = 0,$$

$$(\omega_{1''}{}^{1''}-2\omega_{2''}{}^{2''}+\omega_{3''}{}^{3''})\wedge\omega^{2''}=0.$$

从一个平凡方程 $(\omega_{i''}{}^{i''})\wedge\omega^{2''}=0$ 减去最后方程得到

$$\omega_{2''}{}^{2''}\wedge\omega^{2''}=0.$$

从这些方程可知

$$\omega_{1''}{}^{1''}=\omega^{1''}+w_{1''2''}{}^{1''}\omega^{2''},$$

$$\omega_{2''}{}^{2''}=w_{2''2''}{}^{2''}\omega^{2''},$$

$$\omega_{3''}{}^{3''}=-\omega^{1''}-(w_{1''2''}{}^{1''}+w_{2''2''}{}^{2''})\omega^{2''}.$$

变换

$$\{e_{i^*}\}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ e_{2^*}{}^{1''} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\{e_{i''}\},$$

保留上面的关系并给出 $\omega_{2^*}{}^{2^*}=\omega_{2''}{}^{2''}+e_{2^*}{}^{1''}\omega^{2''}$。所以可从选取标架使

$$\omega_{2^*}{}^{2^*}=0.$$

可积条件 $d\omega_{2^*}{}^{2^*}=0=(\omega_{2^*}{}^{1^*}-\omega_{3^*}{}^{2^*})\wedge\omega^{2^*}$ 表明 $w_{2^*1^*}{}^{1^*}=w_{3^*1^*}{}^{2^*}$。

a．若 $w_{1^*2^*}{}^{1^*}=0$，则 $de_{1^*}=\omega^{1^*}e_{1^*}+\omega^{2^*}e_{2^*}=dr$；点 $r-e_{1^*}$ 是固定的，于是曲面是以 $r-e_{1^*}$ 为顶点的一个锥面。

b．若 $w_{1^*2^*}{}^{1^*}\neq 0$，则可容许变换只是

$$\{a_i\}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ e_3^{1^*} & 0 & 0\end{pmatrix}\{e_{i^*}\},$$

这里 $\pi_2^1=\omega_{2^*}{}^{1^*}-e_3^{1^*}\pi^2$。所以一个不变标架可以从条件 $P_{22}^1=0$ 得到。Frenet 方程是

$$d\{a_i\}=\begin{pmatrix}\pi^1+P_{12}^1\pi^2 & \pi^2 & 0\\ P_{21}^1\pi^1+P_{22}^1\pi^2 & 0 & \pi^2\\ P_{31}^1\pi^1+P_{32}^1\pi^2 & P_{31}^1\pi^1+P_{32}^2\pi^2 & -\pi^1-P_{12}^1\pi^2\end{pmatrix}\{a_i\},$$

留给读者来计算以不变导数表达可积条件。它们表明，如果知道 π^1，π^2 和 P_{12}^1，那末一切不变量都是可以决定的。

2．曲面的基本形式 由上面的论述，曲面的一切点的不变

仿射 Cartan 矩阵的形式已经决定了. 现在转到用对称微分形式对不变量的实际计算. 仿射几何的第一基本形式是

$$\begin{aligned}\Phi=\|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, d\mathbf{r}\| &= (\pi^1)^2+(\pi^2)^2, &&\text{椭圆区域,}\\ &=2\pi^1\pi^2, &&\text{双曲区域,}\\ &=(\pi^2)^2, &&\text{抛物区域（不是平面）.}\end{aligned} \tag{3.16}$$

这里只考虑椭圆点和双曲点; 可展曲面作为空间曲线的切曲面较易处理（§2.4.2）.

为了计算Φ作为一个参数表示$\mathbf{r}(u^1, u^2)$的一个函数, 我们从存在一个非奇异矩阵(λ_α^β)使得

$$\left\{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha}\right\}=(\lambda_\alpha^\beta)\{\mathbf{a}_\beta\}, \quad \alpha, \beta=1, 2$$

的事实出发. 从此推出$(\pi^\alpha)=(du^\beta)(\lambda_\beta^\alpha)$和

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}, d^2\mathbf{r}\right\|=L_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta=\|\lambda_\alpha^\beta\|\Phi.$$

如果把Φ代换为Φ的π^α的表达式, 并再把π^α以λ_α^β表达, 推出

$$\|L_{\alpha\beta}\|=\begin{cases}\|\lambda_\alpha^\beta\|^4, & \text{在椭圆的情形,}\\ -\|\lambda_\alpha^\beta\|^4, & \text{在双曲的情形.}\end{cases}$$

$|L_{\alpha\beta}|$的符号可以用来区分椭圆区域和双曲区域. 当参数表示给定时, 则可计算基本形式

$$\Phi=\|L_{\alpha\beta}\|^{-1/4}L_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta=\|L_{\alpha\beta}\|^{-1/4}\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}, d^2\mathbf{r}\right\|, \tag{3.17}$$

它的（对称的）微分是

$$\begin{aligned}d\Phi&=\|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, d^3\mathbf{r}\|+\|\mathbf{a}_1, d\mathbf{a}_2, d^2\mathbf{r}\|+\|d\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, d^2\mathbf{r}\|\\ &=\|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, d^3\mathbf{r}\|-I[(\pi^1)^3-3\pi^1(\pi^2)^2]-[\pi^1 d\pi^1+\pi^2 d\pi^2], \quad\text{椭圆的情形}\\ &=\|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, d^3\mathbf{r}\|-J[(\pi^1)^3+(\pi^2)^3]-[\pi^1 d\pi^2+\pi^2 d\pi^1], \quad\text{双曲的情形}\end{aligned}$$

在这两个情形中, 三次形式

$$\Psi=\|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, d^3\mathbf{r}\|-\frac{3}{2}d\Phi=\|L_{\alpha\beta}\|^{-1/4}\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}, d^3\mathbf{r}\right\|-\frac{3}{2}d\Phi$$

$$= I[(\pi^1)^3 - 3\pi^1(\pi^2)^2], \quad \text{椭圆的情形} \tag{3.18}$$
$$= J[(\pi^1)^3 + (\pi^2)^3], \quad \text{双曲的情形}$$

是不变的。Ψ称为仿射几何的第二基本形式，或称为Fubini-Pick 形式。

在椭圆的情形，π^1可以取形如$\pi^1 = a\theta$，其中θ为Ψ的三个线性因子中任一因子，函数a可以按$\Phi - a^2\theta^2 = (\pi^2)^2$是一个完全平方的条件求出。$a$的符号由条件$I > 0$来决定，向量$\mathbf{a}_\alpha$由$d\mathbf{r} = \pi^\alpha \mathbf{a}_\alpha$来求。

在双曲的情形，从(3.16)和(3.18)推出Ψ和Φ可以同时对角化，这个问题的解是唯一的（除了项的变更）。

两个形式Φ和$\Psi = b_{\alpha\beta\gamma}du^\alpha du^\beta du^\gamma$不是互相独立的。从定义容易验证

$$L_{22}b_{111} - 2L_{12}b_{112} + L_{11}b_{122} = 0,$$
$$L_{22}b_{112} - 2L_{12}b_{122} + L_{11}b_{222} = 0.$$

由于这些条件，Φ和Ψ叫做从配极。因为次数不同的形式的从配极没有简单的几何解释，我们对它不作进一步的研究。

3．导出方程 不变量I和J描述曲面在一点邻域中的形状。

我们取标架$\mathbf{a}_i(\mathbf{r}_0)$作为一个（斜交）坐标系$x^i$的基底。在$\mathbf{r}_0$的邻域中$\mathbf{r}(u^1, u^2)$的Taylor展开式的前几项为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (d\mathbf{r})_0 + \frac{1}{2}(d^2\mathbf{r}_0) + \frac{1}{6}(d^3\mathbf{r})_0 + \cdots,$$

或者把坐标固定起来，比如$\mathbf{r}_0 = 0$，$(d\mathbf{r})_0 = x^1\mathbf{a}_1 + x^2\mathbf{a}_2$〔从此$(\pi^\alpha)_0 = x^\alpha$〕，或者可以从基本形式来计算，推出

$$x^3 = \|\mathbf{a}_1(\mathbf{r}_0),\ \mathbf{a}_2(\mathbf{r}_0),\ \mathbf{r}\| = \frac{1}{2}[(x^1)^2 + (x^2)^2] + \frac{I}{6}[(x^1)^3 - 3x^1(x^2)^2] + \cdots, \quad \text{椭圆的情形} \tag{3.19$_1$}$$

$$x^3 = x^1x^2 + \frac{J}{6}[(x^1)^3 + (x^2)^3] + \cdots, \quad \text{双曲的情形} \tag{3.19$_2$}$$

从这些公式容易看出“椭圆、双曲、抛物”点这些字在欧氏几何与仿射几何中有同样的意义。

下列问题留给读者作为练习：

1．决定曲面 $(x^1)^3+(x^2)^3+(x^3)^3=1$ 上的椭圆区域和双曲区域。

2．求问题1°的曲面的仿射曲率。

3．求曲面 $x^3e^{x^1x^2}=1$ 在（0，0，1）的仿射曲率〔应用公式(3.19)〕。

4．证明一个二次曲面的仿射曲率等于零。

5．讨论由公式（3.19）所描述的曲面（关于笛氏坐标），假定仿射曲率为常数和展开式中未写出的项不计。

6．求曲面 $x^3=4x^1x^2-2(x^1)^2-(x^2)^4$ 在（0，0，0）的仿射法线和仿射曲率〔提示：求斜交轴来得出一个展开式（3.19)〕。

7．用仿射法线 a_3 我们结合由 $\alpha(a_3)=1$ 的一个协变向量。

（a）证明 $\alpha(r_{u^1})=\alpha(r_{u^2})=(\partial\alpha/\partial u^\beta)(r_{u^\gamma})=0$。

（b）证明切面是 $\alpha_i(x^i-r^i)=0$。

（c）为什么在这个问题中协变与逆变向量的区别是本质的？

8．仿照定理 2.26 叙述仿射几何中的存在性和唯一性定理。

9．写出抛物曲面的不变量的可积条件。

4．特殊曲面

（1）$I=0$。我们从研究一切点都是Darboux 脐点的曲面开始。我们可以从

$$d\{e_{i''}\}=\begin{pmatrix}0 & \omega_{1''}{}^{2''} & \omega^{1''}\\ -\omega_{1''}{}^{2''} & 0 & \omega^{2''}\\ \omega_{3''}{}^{1''} & \omega_{3''}{}^{2''} & 0\end{pmatrix}\{e_{i''}\}$$

出发。对于$d\omega_{1''}{}^{1''}$和$d\omega_{3''}{}^{3''}$的可积条件是

$$w_{3''2''}{}^{1''}=w_{3''1''}{}^{2''}=0.$$

关于标架 $\{e_{i''}\}$ 的可容许变换只是由（3.11）给定的；从它们得到

$$\pi_1^2=\omega_{1''}{}^{2''}+d\theta,$$

$$\pi_3^1=(w_{3''1''}{}^{1''}\cos^2\theta+w_{3''2''}{}^{2''}\sin^2\theta)\pi^1+(w_{3''2''}{}^{2''}-w_{3''1''}{}^{1''})\sin\theta\cos\theta\pi^2,$$

$$\pi_3^2=(w_{3''2''}{}^{2''}-w_{3''1''}{}^{1''})\sin\theta\cos\theta\pi^1+(w_{3''1''}{}^{1''}\sin^2\theta$$

$$+w_{3''2''}{}^{2''}\cos^2\theta)\pi^2.$$

因为经过变换后，可积条件也必成立，所以有$P^1_{32}=P^2_{31}=0$，即$w_{3''2''}{}^{2''}=w_{3''1''}{}^{1''}$并且还有$P^2_{32}=P^1_{31}$。对于$d\pi^1_3$和$d\pi^2_3$的可积条件给出$dP^1_{31}=0$；$P^1_{31}=c$是一常数。最后，Frenet方程是

$$d\{a_i\}=\begin{pmatrix}0 & \pi^2_1 & \pi^1\\ -\pi^2_1 & 0 & \pi^2\\ c\pi^1 & c\pi^2 & 0\end{pmatrix}\{a_i\}, \tag{3.20}$$

$$d\pi^2_1=c\pi^1\wedge\pi^2.$$

A. $c=0$。这时，π^2_1是一全微分$-d\theta(u^1,u^2)$；从此存在一个变换（3.11）给出一个标架$\{a_i\}$，使得$\pi^2_1=0$，则又有$d\pi^\alpha=0$，并且我们可求新坐标（局部）使得$\pi^\alpha=dv^\alpha$。Frenet方程

$$dr=dv^1a_1+dv^2a_2,$$
$$da_1=dv^1a_3,$$
$$da_2=dv^2a_3,$$
$$da_3=0$$

是容易积分的：

$$r=r_0+v^1a_1(0)+v^2a_2(0)+\frac{(v^1)^2+(v^2)^2}{2}a_3(0).$$

关于由向量$a_i(0)$确定的斜交坐标系，曲面的方程为

$$x^3=\frac{1}{2}[(x^1)^2+(x^2)^2].$$

这是一个**椭圆抛物面**。**仿射法线就是抛物面的直径方向**。

B. $c\neq0$。这时$da_3=c(\pi^1a_1+\pi^2a_2)=cdr$。若取原点，使$a_3(0)-r(0)=0$，则仿射法线平行于向径：$a_3=cr$。这样一曲面叫做一个**仿射球面**（$N=cr$刻划欧氏球面）。为了使(3.20)中的Cartan矩阵为反对称的，我们引用

$$\{a_{i'}\}=\begin{pmatrix}k & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{k^2}\end{pmatrix}\{a_i\}$$

来变更向量 $\{a_i\}$ 的长，结果是

$$d\begin{pmatrix} k\mathbf{a}_1 \\ k\mathbf{a}_2 \\ \dfrac{\mathbf{a}_3}{k^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pi_1^2 & k^3\pi^1 \\ -\pi_1^2 & 0 & k^3\pi^2 \\ \dfrac{c\pi^1}{k^3} & \dfrac{c\pi^2}{k^3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k\mathbf{a}_1 \\ k\mathbf{a}_2 \\ \dfrac{\mathbf{a}_3}{k^2} \end{pmatrix}.$$

从此，我们要选取 $k^6 = -c$。

1） $c<0$。若取 $k^6=-c$，则 Cartan 矩阵是在 $\mathscr{L}(O_3)$ 中，若标架 $\{k\mathbf{a}_1(0),\ k\mathbf{a}_2(0),\ \mathbf{a}_3(0)/k^2\}$ 是标准正交的，则 $\mathbf{a}_3$ 的端点画一个半径为 k^2 的球面，若标架的原点是固定的，则在一般情形下，$\mathbf{a}_3(u^1, u^2)$ 的轨迹是一椭球面，就是一个球面的仿射象。$\mathbf{r}(u^1, u^2)$ 描绘一个位似椭球面。

2） $c>0$。若取 $k^6=c$，则 Cartan 矩阵是在矩阵群 A 的 Lie 代数中，这里

$$A^t\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因为群是由对称性质刻划的：

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}C(A) = -\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}C(A)\right)^t.$$

在这个群的意义下，如果标架是"标准正交的"，就是，

$$\{a_i^k(0)\}^t\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\{a_i^k(0)\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

它对一切参数值保持如此。这表示 $\mathbf{a}_3/k^2$ 的端点总在双叶等轴双曲面 $-(x^1)^2-(x^2)^2+(x^2)^2=1$ 上。把它施行一个一般仿射变换后，得到的曲面 $\mathbf{r}$ 仍是双叶双曲面。

在上述两个情形中，仿射法线通过二次曲面的中心。

（2） $J=0$。按照方程 (3.14)，我们必须区分两个情形。

A. $P^1_{22}\neq 0$。Frenet 公式是

$$d\{a_i\}=\begin{pmatrix}\pi^1_1 & 0 & \pi^2\\ P^1_{22}\pi^2 & -\pi^1_1 & \pi^1\\ P^1_{31}\pi^1 & P^2_{32}\pi^2 & 0\end{pmatrix}\{a_i\}.$$

曲线 $\pi^2=0$ 是直线（$da_1=\pi^1_1a_1$）。这时曲面都是直纹面（都是不可展曲面）。

B. $P^1_{22}=0$。

1）$P^2_{11}\neq 0$。经过项的一个变更 $a_1\to a_2$，$a_2\to a_1$，$a_3\to -a_3$ 使这个情形与 A 相同。

2）$P^2_{11}=0$。按照情形（1）那样论述，Frenet 公式是

$$d\{a_i\}=\begin{pmatrix}\pi^1_1 & 0 & \pi^2\\ 0 & -\pi^1_1 & \pi^1\\ c\pi^1 & c\pi^2 & 0\end{pmatrix}\{a_i\},$$

$$dc=0$$

两系参数曲线都是直线，于是曲面是直纹二次曲面。对 $c=0$，我们有双曲抛物面

$$r=r_0+x^1a_1(0)+x^2a_2(0)+x^1x^2a_3(0).$$

对 $c\neq 0$，象（1）B那样论述，表明曲面是一单叶双曲面，就是

$$(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2=1$$

的仿射象，仿射法线通过曲面的中心。

（3）容有 A^3 中一个可迁么模仿射变换群的曲面。这种曲面的特征是它们的一切不变量都是常量。我们来决定一切这种椭圆型与双曲型曲面。抛物型曲面见习题。

A. 椭圆型曲面。(3.12) 最后两个方程变为

$$(P^1_{31}-P^2_{32})P^2_{11}-2P^1_{32}P^2_{11}=0,$$

$$(P^1_{31}-P^2_{32})P^2_{11}+2P^1_{32}(P^2_{12}+2I)=0.$$

或者这个齐次方程组有平凡解

$$P^1_{31}-P^2_{32}=0,\quad P^1_{32}=0, \tag{3.22}$$

或者它的行列式等于零：

$$P^2_{12}(P^2_{12}+2I)+(P^2_{11})^2=0. \qquad (3.22)'$$

i) $P^1_{31}=P^2_{32}$, $P^1_{32}=0$，方程（3.12）是

$$P^2_{11}I=0,\ 6I(P^2_{12}+I)=(P^2_{11})^2.$$

a．$I=0$。零仿射曲率的椭圆型曲面是二次曲面。一切二次曲面容有可迁么模仿射变换群。这里我们决定椭圆型抛物面的群（情形（1）A），把这个方法应用到一切二次曲面。

抛物面的方程可写为矩阵形式

$$(x^1, x^2, x^3, 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\\ 1\end{pmatrix}=0.$$

这个方程对于变换

$$(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, 1)$$
$$=(x^1, x^2, x^3, 1)\begin{pmatrix}a_1^{1'} & a_1^{2'} & a_1^{3'} & 0\\ a_2^{1'} & a_2^{2'} & a_2^{3'} & 0\\ a_3^{1'} & a_3^{2'} & a_3^{3'} & 0\\ b^{1'} & b^{2'} & b^{3'} & 1\end{pmatrix},\quad \|a_i^{j'}\|=1$$

是不变的。从此

$$\begin{pmatrix}a_1^{1'} & a_1^{2'} & a_1^{3'} & 0\\ a_2^{1'} & a_2^{2'} & a_2^{3'} & 0\\ a_3^{1'} & a_3^{2'} & a_3^{3'} & 0\\ b^{1'} & b^{2'} & b^{3'} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1^{1'} & a_2^{1'} & a_3^{1'} & b^{1'}\\ a_1^{2'} & a_2^{2'} & a_3^{2'} & b^{2'}\\ a_1^{3'} & a_2^{3'} & a_3^{3'} & b^{3'}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

同这个条件相容的矩阵只是

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & b^{1'}\cos\varphi-b^{2'}\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & b^{1'}\sin\varphi+b^{2'}\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ b^{1'} & b^{2'} & \dfrac{1}{2}(b^{1'})^2+(b^{2'})^2 & 1\end{pmatrix},$$

这个群有三个参数。

b. $I\neq 0$。这时 $P^2_{11}=0$ 和 $P^2_{12}=-I$。由方程(3.12)，$d\pi^\alpha=0$，我们可以用参数 u^α 使得 $\pi^\alpha=du^\alpha$。Frenet 方程是

$$d\mathbf{r}=\mathbf{a}_1du^1+\mathbf{a}_2du^2,$$

$$d\{\mathbf{a}_i\}=\begin{pmatrix} Idu^1 & -Idu^2 & du^1 \\ -Idu^2 & -Idu^1 & du^2 \\ 2I^2du^1 & 2I^2du^2 & 0 \end{pmatrix}\{\mathbf{a}_i\}.$$

因为 $d\mathbf{a}_3=2I^2d\mathbf{r}$，所以曲面是一仿射球面。如果选取原点，使 $\mathbf{a}_3=2I^2\mathbf{r}$，则 $\mathbf{r}$ 为如下的偏微分方程组的一个积分：

$$\mathbf{r}_{u^1}=\mathbf{a}_1,\qquad \mathbf{r}_{u^2}=\mathbf{a}_2,$$

$$\mathbf{r}_{u^1u^1}=I\mathbf{r}_{u^1}+2I^2\mathbf{r},$$

$$\mathbf{r}_{u^1u^2}=-I\mathbf{r}_{u^2},$$

$$\mathbf{r}_{u^2u^2}=-I\mathbf{r}_{u^2}+2I^2\mathbf{r},$$

对 $\mathbf{r}_{u^1u^2}$ 的方程表明 $\mathbf{r}=e^{-Iu^1}\mathbf{x}(u^2)+\mathbf{y}(u^1)$；另两个方程给出

$$\mathbf{r}=\mathbf{c}_1e^{2Iu^1}+e^{-Iu^1}(\mathbf{c}_2e^{I\sqrt{3}u^2}+\mathbf{c}_3e^{-I\sqrt{3}u^2}).$$

对 $u^1=u^2=0$，条件 $\|\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\|=1$ 变成

$$12\sqrt{3}\,I^4\|\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3\|=1.$$

如果应用线性无关的向量 $\mathbf{c}_i$ 作为坐标向量，则 $\mathbf{r}=x^i\mathbf{c}_i$，曲面的方程是

$$x^1x^2x^3=1.$$

它容有双参数群

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{x}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix}.$$

因为有三族 Darboux 标架，所以有可能组成群的每个变换具有一个旋转 $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$。全变换群不能从它的局部群得到；它有三个“联络支量”。对具有非零曲率的一切椭圆型曲面都能得到这个情况。

ii）$P_{12}^2(P_{12}^2+2I)+(P_{11}^2)^2=0$。如上所述，我们只讨论 $I\neq 0$ 的情形。

a．$P_{11}^2=0$。

i）$P_{12}^2=0$。因为 $d\pi^1=0$，$d\pi^2=I\pi^1\wedge\pi^2$，从而可以求出这样的参数，使得 $\pi^1=du^1$ 和 $\pi^2=e^{Iu^1}du^2$，要积分的方程是

$$d\mathbf{r}=du^1\mathbf{a}_1+e^{Iu^1}du^2\mathbf{a}_2,$$

$$d\{\mathbf{a}_i\}=\begin{pmatrix} Idu^1 & 0 & du^1 \\ -2Ie^{Iu^1}du^2 & -Idu^1 & e^{Iu^1}du^2 \\ 6I^2du^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\{\mathbf{a}_i\}.$$

因为 $\mathbf{r}_{u^1u^2}=0$，从此推出

$$\mathbf{r}=\mathbf{x}(u^1)+\mathbf{y}(u^2). \tag{3.23}$$

若一曲面的方程可以写成形式（3.23），则称为**平移曲面**。要积分的方程是

$$d^2\mathbf{a}_1=(Id\mathbf{a}_1+6I^2\mathbf{a}_1du^1)du^1,$$

从此我们有

$$\mathbf{a}_1=\mathbf{c}_1e^{-2Iu^1}+\mathbf{c}_2e^{3Iu^1},$$

和

$$\mathbf{a}_3=-3I\mathbf{c}_1e^{-2Iu^1}+2I\mathbf{c}_2e^{3Iu^1},$$
$$d(e^{Iu^1}\mathbf{a}_2)=-5I\mathbf{c}_1du^2.$$

因此

$$\mathbf{a}_2=(\mathbf{c}_3-5I\mathbf{c}_1u^2)e^{-Iu^1}.$$

选取原点使得在 $d\mathbf{r}$ 的积分过程中不导入新常数，最后结果是

$$\mathbf{r}=-\left[\frac{1}{2I}e^{-2u^1I}+\frac{5}{2}I(u^2)^2\right]\mathbf{c}_1+\frac{1}{3I}e^{3Iu^1}\mathbf{c}_2+u^2\mathbf{c}_3,$$

但从属的条件是

$$|\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3|=5I|\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3|=1.$$

若取 $5I\mathbf{c}_1$，$\mathbf{c}_2$，$\mathbf{c}_3$ 为一个单模坐标系的基向量，则曲面的方程是

$$[(x^3)^2+2x^1]^3(x^2)^2=-\frac{1}{1,125I^3},$$

对每个可能的 Darboux 标架作用在这个曲面上的群是

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{x}\begin{pmatrix} a^{-2/3} & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ ba^{-1/3} & 0 & a^{-1/3} \end{pmatrix}+\left(\frac{b^2}{2},\ 0,\ b\right).$$

ii）$P^2_{12}=-2I$。方程 $(3.12)_3$ 变为 $12I^2=0$。对 $I\neq0$ 的曲面不存在。

b．$P^2_{11}\neq0$。方程（3.12)有唯一解

$$P^2_{11}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}I,\quad P^2_{12}=-\frac{3}{2}I,$$

容易验证，经过 $\pm2\pi/3$ 的一个旋转（3.11）情形 a i)的Cartan 矩阵变到情形 b 的矩阵。除了 Darboux 标架的一个不同选取外，两个情形是一样的。

B．双曲型曲面。公式（3.15）变为

$$\begin{aligned}
&P^1_{31}=P^2_{32}=J^2-2P^1_{11}P^1_{12},\\
&P^2_{31}=-3JP^1_{12},\\
&P^1_{32}=3JP^1_{11},\\
&JP^2_{31}-2P^1_{11}P^1_{32}=0,\\
&2P^1_{12}P^2_{31}+JP^1_{32}=0.
\end{aligned}\tag{3.24}$$

i）$J=0$。如果寻找的曲面不是二次曲面，我们必须从在考虑（2）A情形中给定的 Cartan 矩阵开始。方程

$$d\pi^1_2=\pi^i_2\wedge\pi^1_i$$

变为$P^1_{22}P^1_{11}=0$。因为我们必有 $P^1_{22}\neq0$，从此推出$P^1_{11}=0$，于是Frenet方程化为

$$d\mathfrak{r}=du^1\mathbf{a}_1+du^2\mathbf{a}_2,$$

$$d\{\mathbf{a}_i\}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & du^2 \\ du^2 & 0 & du^1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\{\mathbf{a}_i\}.$$

由此可见，这样一曲面$d\mathbf{a}_3=0$，于是仿射法线是固定的。具有固定仿射法线的曲面叫做一个非正常仿射球面。经过一个简单的积分给出

$$\mathrm{r}=\left(u^1+\frac{1}{2}(u^2)^2\right)\mathrm{c}_1+u^2\mathrm{c}_2+\left(u^1u^2+\frac{1}{6}(u^2)^3\right)\mathrm{c}_3,$$

从属的条件是 $\|\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \mathrm{c}_3\|=1$。这个曲面叫做 Cayley **曲面**，以关于基 $\{\mathrm{c}_i\}$ 的坐标来表达，它的方程是

$$x^3=x^1x^2-\frac{1}{3}(x^2)^3.$$

它的群是

$$(x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime})=(x^1, x^2, x^3)\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ a & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$+\left(b, a, ab-\frac{1}{3}a^3\right).$$

ii）$J\neq 0$。(3.24) 的最后两个方程或者只有平凡解 $P^2_{31}=P^1_{32}=0$，否则它们的行列式为零。

a．$P^2_{31}=P^1_{32}=0$。由 (3.24)，要积分的方程是

$$d\mathrm{r}=du^1\mathrm{a}_1+du^2\mathrm{a}_2,$$
$$d\{\mathrm{a}_i\}=\begin{pmatrix}0 & Jdu^1 & du^2\\ Jdu^2 & 0 & du^1\\ J^2du^1 & J^2du^2 & 0\end{pmatrix}\{\mathrm{a}_i\}.$$

曲面是一仿射球面。我们选取一切仿射法线的公共点 $\mathrm{a}_3(0)-J^2\mathrm{r}(0)$ 为原点，则曲面的偏微分方程变为

$$\mathrm{r}_{u^1}=\mathrm{a}_1,\quad \mathrm{r}_{u^2}=\mathrm{a}_2,$$
$$\mathrm{r}_{u^1u^1}=J\mathrm{r}_{u^2},\quad \mathrm{r}_{u^1u^2}=J^2\mathrm{r},\quad \mathrm{r}_{u^2u^2}=J\mathrm{r}_{u^1},$$
$$\mathrm{r}_{u^1u^1u^1}=J^3\mathrm{r}=\mathrm{r}_{u^2u^2u^2}.$$

从最后一行推出

$$\mathrm{r}=\mathrm{x}_1(u^2)e^{Ju^1}+e^{-\frac{Ju^1}{2}}\left[\mathrm{x}_2(u^2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}Ju^1\right.$$
$$\left.+\mathrm{x}_3(u^2)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}Ju^1\right]$$
$$=\mathrm{y}_1(u^1)e^{Ju^2}+e^{-\frac{Ju^2}{2}}\left[\mathrm{y}_2(u^1)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}Ju^2\right.$$

$$+\mathbf{y}_3(u^1)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}Ju^2\Big],$$

则从此看到

$$\mathbf{r}=\frac{2}{3^{3/2}J^4}\ e^{J(u^1+u^2)}\mathbf{c}_1+e^{-\frac{1}{2}J(u^1+u^2)}\Big[\mathbf{c}_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}J(u^1-u^2)$$

$$+\mathbf{c}_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}J(u^1+u^2)\Big]$$

并具有$\|\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3\|=1$。曲面

$$x^1[(x^2)^2+(x^3)^2]=2\cdot 3^{-3/2}J^{-4}$$

在

$$(x^{1'},x^{2'},x^{3'})=(x^1,x^2,x^3)\begin{pmatrix}\frac{1}{c^2} & 0 & 0\\ 0 & c\cos\theta & c\sin\theta\\ 0 & -c\sin\theta & c\cos\theta\end{pmatrix}$$

的作用之下是不变的。

b．$J^2+4P^1_{11}P^1_{12}=0$。方程（3.24）有唯一的解：

$$P^1_{11}=\frac{J}{2},\ P^1_{12}=-\frac{J}{2},\ P^1_{31}=P^1_{32}=P^2_{31}=P^2_{32}=\frac{3J^2}{2}.$$

由方程（3.15），$d(\pi^1+\pi^2)=0$；$d(\pi^1-\pi^2)=-J\pi^1\wedge\pi^2$。

我们利用（非么模）标架$\mathbf{b}_1=\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)$，$\mathbf{b}_2=\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)$，$\mathbf{b}_3=\mathbf{a}_3$代替标架$\mathbf{a}_i$，我们必须来积分

$$d\mathbf{r}=du^1\mathbf{b}_1+e^{Ju^1/2}du^2\mathbf{b}_2,$$

$$d\{\mathbf{b}_i\}=\begin{pmatrix}\frac{J}{2}du^1 & 0 & \frac{1}{2}du^1\\ Je^{Ju^1/2}du^2 & -\frac{J}{2}du^1 & -\frac{1}{2}e^{Ju^1/2}du^2\\ 3J^2 & 0 & 0\end{pmatrix}\{\mathbf{b}_i\}.$$

从

$$2\frac{d^2\mathbf{b}_1}{(du^1)^2}-J\frac{d\mathbf{b}_1}{du^1}-3J^2\mathbf{b}_1=0,$$

我们就有

$$\mathbf{b}_1 = +\frac{1}{10J}e^{-Ju^1}\mathbf{c}_1 + e^{\frac{3}{2}Ju^1}\mathbf{c}_2,$$

$$\mathbf{b}_2 = -4u^2(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_3)e^{-\frac{1}{2}Ju^1},$$

$$\mathbf{b}_3 = -\frac{3}{10}e^{-Ju^1}\mathbf{c}_1 + 2Je^{\frac{3}{2}Ju^1}\mathbf{c}_2.$$

从此

$$\mathbf{r} = \left[-\frac{1}{8}(u^2)^2 - \frac{1}{10J^2}e^{-Ju^1}\right]\mathbf{c}_1 + \frac{2}{3J}e^{\frac{3}{2}Ju^1}\mathbf{c}_2 + u^2\mathbf{c}_3,$$

$\mathbf{r}$ 是一个平移曲面，它关于么模系 $\mathbf{c}_i$ 的方程是

$$(x^2)^2[(x^3)^2-8x^1]^3 = \frac{2^8}{3^2 5^3 J^8},$$

在

$$(x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime}) = (x^1, x^2, x^3)\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^3} & 0 \\ \frac{ab}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{b^2}{8}, 0, b\right)$$

之下不变。总之，我们有

定理3.12 容有一个可迁么模仿射变换群的曲面是二次曲面；椭圆型曲面

$$x^1x^2x^3 = 2^{-2}3^{-3/2}J^{-4} \quad 和 \quad [(x^3)^2+2x^1]^3(x^2)^2 = -3^{-2}5^{-3}J^{-8},$$

双曲型曲面

$$x^1[(x^2)^2+(x^3)^2] = 2\cdot 3^{-3/2}J^{-4} \quad 和 \quad (x^2)^2[(x^3)^2-8x]^3 = 2^8 3^{-2}5^{-3}J^{-8},$$

和直纹面

$$x^3 = x^1x^2 - \frac{1}{3}(x^2)^3.$$

5. 密切二次曲面．Darboux 切线 在椭圆的情形，向量 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$ 的方向是共轭方向，这在后面再来明确规定；在双曲的情形，它们是渐近方向；在直纹曲面（不是二次曲面和可展曲面）的情形，向量 $\mathbf{a}_1$ 的方向重合于母线的方向。

在曲面上一点可以寻求依赖于三个参数并与曲面有不低于二阶接触的密切二次曲面集。并且一般来说，不低于三阶接触的二次曲面不存在。注意到方程 (3.19)，容易得到密切二次曲面集。

例如，在椭圆的情形，这些曲面的方程可写为如下的形式：

$$A(x^3)^2+2(Bx^1+Cx^2+1)x^3-[(x^1)^2+(x^2)^2]=0, \tag{3.25}$$

并在原点的邻域中，我们有

$$x^3=\frac{1}{2}[(x^1)^2+(x^2)^2]-\frac{1}{2}[(x^1)^2+(x^2)^2](Bx^1+Cx^2)+(4).$$

因为对二次曲面 $I=0$，所以它们有相同的仿射法线，于是从(3.19)，我们的曲面必须是

$$x^3=\frac{1}{2}[(x^1)^2+(x^2)^2]+(4),$$

它们由条件 $B=C=0$ 来刻划。因而从 (3.25) 这些二次曲面还依赖于一个参数，并有方程

$$A(x^3)^2+2x^3-[(x^1)^2+(x^2)^2]=0. \tag{3.26}$$

特别地，我们看到，它们的仿射法线的方向是密切抛物面的直径方向。

从方程 (3.19)，我们看到，在一般的情形下，二次曲面 (3.25) 与曲面的交线在原点有三重点，在这点处它们的切线决定于方程

$$\frac{1}{6}I[(x^1)^3-3x^1(x^2)^2]+\frac{1}{2}[(x^1)^2+(x^2)^2](Bx^1+Cx^2)=0.$$

寻求使这些切线重合的条件。如果令 $\frac{x^2}{x^1}=\operatorname{tg}\theta$，则这个方程取形式

$$I\cos 3\theta+3(B\cos\theta+C\sin\theta)=0,$$

写出它关于 θ 的头两次导数等于零，得到

$$\begin{aligned} &I\sin 3\theta+B\sin\theta-C\cos\theta=0, \\ &3I\cos 3\theta+B\cos\theta+C\sin\theta=0, \end{aligned} \tag{3.27}$$

特别，由此推出

$$\cos 3\theta = 0.$$

构成三重相切的方向有三个，它们在所考虑点决定三条切线，称为Darboux切线，并根据定义它们是射影不变的，因此，给出（除了π外）角

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}.$$

它们使三次形式 $(x^1)^3 - 3x^1(x^2)^2 = 0$。这就是§3.3.1中所述的三个Darboux方向。我们也可以证明，这是曲面与二次曲面(3.24)的交线的切线方向，这给出仿射法线的新的解释。

三族Darboux曲线，即在它们的每点与某Darboux切线相切的曲线是下面方程的积分：

$$(\omega^1)^3 - 3(\omega^1)(\omega^2)^2 = 0.$$

考虑方向 $\theta = \frac{\pi}{2}$（对其它的方向可进行类似的考虑）。从方程（3.27）给出

$$B = I, \quad C = 0.$$

这些二次曲面的中心的轨迹是直线 $x^2 = 0$，$x^1 - Ix^3 = 0$，由此我们得到Frenet标架的轴的解释。

在双曲点的情形可进行类似的考虑。密切二次曲面有方程

$$A(x^3)^2 + 2(Bx^1 + Cx^2 + 1)x^3 - 2x^1x^2 = 0. \qquad (3.28)$$

这些曲面中与曲面有共同仿射法线的曲面决定于方程

$$A(x^3)^2 + 2x^3 - 2x^1x^2 = 0. \qquad (3.29)$$

它们只有一条实的Darboux切线，由方程

$$(x^1)^3 + (x^2)^3 = 0$$

给出；Darboux曲线是方程$(\omega^1)^3 + (\omega^2)^3 = 0$的积分。

6. Lie的二次曲面 在曲面S上某点的密切二次曲面中，Lie考虑一个很重要的二次曲面，通称为Lie的二次曲面。现在来求出它的方程。

直纹二次曲面在一般情形下，由三条互不相交的直线可以完全决定。所以先从直纹面开始。给定母线l和两条邻近母线决定

一个二次曲面，当后两母线趋于母线 l 时，这个二次曲面趋于 L，它的第二族母线是由与原曲面的三条邻近母线相交的直线构成。所以二次曲面 L 由直线构成而与曲面有二阶接触，即由沿所考虑的直线的渐近切线构成。

现在考虑具有实渐近曲线的曲面 S（双曲的情形）。假定 $A_1(\mathrm{x})$ 和 $A_2(\mathrm{x})$ 为在点 x 的渐近方向；$\mathscr{A}_1(\mathrm{x})$ 和 $\mathscr{A}_2(\mathrm{x})$ 是对应的渐近曲线。考虑某点 x_0，在 $\mathscr{A}_1(\mathrm{x}_0)$ 上一切点 x 引直线 $A_2(\mathrm{x})$ 构成直纹面，对这个直纹面考虑 Lie 的二次曲面 L_1，按类似的方法，从 $\mathscr{A}_2$ 出发可决定二次曲面 L_2。我们要证明，二次曲面 L_1 和 L_2 重合。因此，在 S 上每点 x 可决定射影不变的二次曲面，就是 Lie 的二次曲面。

回忆方程 (3.15)，求在点 x 的二次曲面 L_1，决定于过 x 的曲线 $\pi^2=0$ 有如下的形式：

$$\begin{aligned} d\mathrm{a}_1&=\pi^1(\alpha\mathrm{a}_1+J\mathrm{a}_2),\\ d\mathrm{a}_2&=\pi^1(-\alpha\mathrm{a}_2+\mathrm{a}_3),\\ d\mathrm{a}_3&=\pi^1(\beta'\mathrm{a}_1+\alpha'\mathrm{a}_2), \end{aligned}\tag{3.30}$$

因为 π^1 只依赖于一个参数，所以可令 $\pi^1=du$。由渐近切线 a_2 构成的直纹面决定于方程

$$\mathrm{x}=\mathrm{x}+\lambda\mathrm{a}_2,$$

式中 λ 是新参数，不同于母线方向的渐近方向决定于方程

$$\left(\frac{\partial\mathrm{x}}{\partial u},\ \frac{\partial\mathrm{x}}{\partial\lambda},\ \frac{\partial^2\mathrm{x}}{\partial u^2}du+2\ \frac{\partial^2\mathrm{x}}{\partial u\partial\lambda}d\lambda\right)=0,$$

然后导出

$$d\lambda=\left(\lambda\alpha+\frac{\lambda^2\beta'}{2}\right)du.$$

在点 x 的渐近切线的方向是

$$\frac{d\mathrm{x}}{du}=\mathrm{a}_1+\lambda\frac{d\mathrm{a}_2}{du}+\mathrm{a}_2\left(\lambda\alpha+\frac{\lambda^2\beta'}{2}\right)=\mathrm{a}_1+\frac{\lambda^2}{2}\beta'\mathrm{a}_2+\lambda\mathrm{a}_3,$$

因而曲面 L_1 的参数表示是

$$Z=\mathrm{x}+\mu\frac{d\mathrm{x}}{du}=\mathrm{x}+\lambda\mathrm{a}_2+\mu\left(\mathrm{a}_1+\frac{\lambda^2}{2}\beta'\mathrm{a}_2+\lambda\mathrm{a}_3\right).$$

或者，若取 a_1，a_2，a_3 作为轴 x^1，x^2，x^3 的方向，则有

$$x^1=\mu,\quad x^2=\lambda+\mu\frac{\lambda^2}{2}\beta',\quad x^3=\mu\lambda,$$

所以给出方程

$$2x^3-2x^1x^2+\beta'(x^3)^2=0. \tag{3.31}$$

注意，β' 是在曲线 $\pi^2=0$ 上的比值 $\frac{\pi_3^1}{\pi^1}$。因为 $\pi_3^2=\alpha'\pi^1+\beta'\pi^2$，所以 β' 也是在曲线 $\pi^1=0$ 上的比值 $\frac{\pi_3^2}{\pi^2}$。因此第二渐近曲线决定同一二次曲面。

我们看到，Lie 的二次曲面的中心在仿射法线上，所以给出仿射法线的另一解释。

在直纹曲面的情形，方程（3.28）中的 β' 应换为 3α。

最后指出，在椭圆的情形，在曲面 S 上一点的 Lie 的二次曲面定义为以 $x+\frac{1}{2}(k_1+k_2)a_3$ 为中心与曲面 S 在 x 有阶 $\geqslant 3$ 的接触的二次曲面。

让读者解答和证明下列命题。

1° 证明一个欧氏球面是一个仿射球面。

2° 一个仿射球面是由 $da_3=\lambda dr$ 确定的。证明 $\lambda=\text{const}$。

3° 证明，若在一曲面的每点存在一二次曲面与曲面有阶 >3 的接触，则曲面是一二次曲面。〔提示：由（3.19），仿射曲率必为零，则剩下只有一个情形例外。〕

4° 求 Cayley 曲面的母线。

5° 证明在抛物的情形，具有一个可迁仿射变换群的仅有的曲面（它不是一二次曲面，一柱面，或一锥面）有 Frenet 方程

$$d\{a_i\}=\begin{pmatrix} \pi^1 & \pi^2 & 0 \\ p_{22}^1\pi^2 & 0 & \pi^2 \\ -2p_{22}^1\pi^1 & -p_{22}^1\pi^1 & -\pi^1 \end{pmatrix}\{a_i\}.$$

(a) 对 $p_{22}^1=0$，积分这些方程，并求曲面的群。

(b) 在 $p_{22}^1\neq 0$ 的情形，在 § 3.1 中所研究的抛物型曲面中与这个曲面等同起来。

6° 求具有可迁么模仿射变换群的一切柱面和一切锥面。

7° Lie 的二次曲面的中心是固定的一个充要条件是曲面为一个仿射球面。

8° 证明，若三次基本形式恒等于零，则曲面的一切 Lie 的二次曲面都重合。

7曲面上的曲线

（1）椭圆的情形．正如在度量几何中那样，我们研究曲面曲线也引用曲线的仿射标架．令 θ 表示在曲线上一点的切线 $\boldsymbol{\tau}$ 和 Darboux 方向 $\mathbf{a}_1$ 的交角．曲线的标架（三面形）$\{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}_3\}$ 是从 $\{\mathbf{a}_i\}$ 经过一变换（3.11）而得到的标架，称 $\boldsymbol{\tau}$ 为仿射切线，$\boldsymbol{\nu}$ 为仿射切法线．在椭圆的情形对切法线（依赖于 Darboux 标架）有两个可能的选择．我们可以定义一个仿射曲面弧长 s：

$$\pi^1=\cos\theta ds,\ \ \pi^2=\sin\theta ds,$$

即

$$\Phi=ds^2.$$

曲面弧长与曲线论中引入的仿射弧长没有任何联系．Frenet 导出公式是

$$d\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}\\ \boldsymbol{\nu}\\ \mathbf{a}_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} I\cos3\theta ds & (-I\sin3\theta+k_g) & ds\\ (-I\sin3\theta-k_g)ds & -I\cos3\theta ds & 0\\ \pi_3^1\cos\theta+\pi_3^2\sin\theta & -\pi_3^1\sin\theta+\pi_3^2\cos\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}\\ \boldsymbol{\nu}\\ \mathbf{a}_3\end{pmatrix},$$

式中 $$k_g ds=d\theta+p_{11}^2\pi^1+(p_{12}^2+I)\pi^2$$

是对度量 Φ 的曲线的测地曲率．由方程

$$-I\sin3\theta+k_g=0$$

定义的曲线称为仿射测地线．它的密切平面包含仿射法线 $\mathbf{a}_3$．称曲线

$$I\sin3\theta+k_g=0$$

为周线．仿射切法线 $\boldsymbol{\nu}$ 沿周线有一个固定方向．一周线的仿射切

线是

$$\frac{d\tau}{ds}=I\cos 3\theta\,\tau-2I\sin 3\theta\,\nu+a_3$$

的解。若一曲线是平面的，则它的切线至多是两个线性无关向量的一个线性组合。若 $I\neq 0$，则曲面上的一切周线未必都是平面的。因而，若一切周线都是平面曲线，则有 $I=0$，于是曲面是二次曲面（见4A)。故得

定理3.13 (Maschke) 若一个（椭圆型）曲面的一切周线都是平面曲线，则它是一个（椭圆型）二次曲面。

Rodrigues 方程

$$de_3+kd\mathbf{r}=0$$

的积分曲线称为仿射曲率线。它们的切线是沿着由方程组

$$\frac{\pi_3^1}{ds}\cos\theta+\frac{\pi_3^2}{ds}\sin\theta=-k\cos\theta,$$

$$-\frac{\pi_3^1}{ds}\sin\theta+\frac{\pi_3^2}{ds}\cos\theta=-k\sin\theta$$

确定的方向，称为仿射主方向。一般来讲，方程

$$\begin{vmatrix} p_{31}^1+k & p_{32}^1 \\ p_{32}^1 & p_{32}^2+k \end{vmatrix}=0$$

有两个解，记作 k_1，k_2，称为仿射主曲率；并且是仿射不变量，又有仿射总曲率

$$K=k_1k_2=p_{31}^1p_{32}^2-(p_{32}^1)^2$$

和仿射平均曲率

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=-\frac{1}{2}(p_{31}^1+p_{32}^2).$$

若 $k_1=k_2$，则曲面上的点称为一仿射脐点。（仿射脐点和Darboux脐点是不同的概念。）如果曲面的一切点是仿射脐点，则它是仿射球面，如果仿射主曲率都是零，则曲面是非正常仿射球面。

（2）双曲的情形．双曲度量 $ds^2=2\pi^1\pi^2$ 有两个渐近方向，这两个方向按照 ds^2 的符号把切面分为四个区域，在标架 $\{\mathbf{a}_i\}$ 变

到曲线的标架下，符号必须保持不变。

A．对一曲面曲线的切方向，如果 π^1 与 π^2 同号，我们引用

$$\pi^1=\frac{ds}{\sqrt{2}}e^t,\quad \pi^2=\frac{ds}{\sqrt{2}}e^{-t}$$

来定义仿射曲面弧长。并引用

$$\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{a}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{e^t}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{-e^t}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_3\end{pmatrix}$$

定义曲线的仿射标架，它的 Frenet 方程变为

$$d\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{a}_3\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix}\frac{J}{2}\cosh 3t & \frac{J}{2}\sinh 3t-\frac{\pi_1^1+dt}{ds} & 1\\ -\frac{J}{2}\sinh 3t-\frac{\pi_1^1+dt}{ds} & -\frac{J}{2}\cosh 3t & 0\\ \frac{\pi_3^1}{ds}\frac{e^{-t}}{\sqrt{2}}+\frac{\pi_3^2}{ds}\frac{e^t}{\sqrt{2}} & -\frac{\pi_3^1}{ds}\frac{e^{-t}}{\sqrt{2}}+\frac{\pi_3^2}{ds}\frac{e^t}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}
\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{a}_3\end{pmatrix}.$$

对于同样的特殊曲线族可以按照椭圆的情形来研究。仿射测地线是

$$\pi_1^1+dt-\frac{J}{\sqrt{2}}\sinh 3t ds=0$$

的积分曲线，周线是定义为

$$\pi_1^1+dt+\frac{J}{\sqrt{2}}\sinh 3t+ds=0$$

的积分曲线。对一周线

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{J}{\sqrt{2}}\cosh 3t\tau+\sqrt{2}\,J\sinh 3t\nu+\mathrm{a}_3,$$

若一曲面上的一切周线都是平面曲线，则有

$$J=p^2_{11}=p^1_{22}=0\,.$$

曲面是一二次曲面(见4.B)。定理3.13在双曲情形也是成立的。

这时，仿射主方向是

$$\pi^1_3e^{-t}+\pi^2_3e^t=-ke^tds,$$
$$-\pi^1_3e^{-t}+\pi^2_3e^t=-ke^{-t}ds$$

的解；主曲率是

$$p^1_{31}+p^2_{32}+\sqrt{2}\,ke^t+2p^1_{32}\cosh 2t=0\,,$$

$$-p^1_{31}+p^2_{32}-\sqrt{2}\,ke^t+2p^1_{32}\sinh 2t=0$$

不依赖于 t 的解，这是不可能的；双曲曲面没有仿射曲率线。

B．若 $\pi^1\pi^2<0$，则引用

$$\pi^1=\frac{ds}{\sqrt{2}}e^t,\quad \pi^2=-\frac{ds}{\sqrt{2}}e^{-t}$$

来定义曲面弧长，并引用

$$\begin{pmatrix}\nu\\ \dot{\tau}\\ \mathrm{a}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{e^t}{\sqrt{2}} & \frac{e^t}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{e^t}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{a}_1\\ \mathrm{a}_2\\ \mathrm{a}_3\end{pmatrix}$$

来定义曲面曲线的标架。一切公式类似于情形 A 可以建立。

例1 关于仿射法线．a．椭圆的情形．设 π 为曲面在点 r 的切面，曲线 C 为充分接近于 r，且为平行于 π 的平面与曲面的截线，则 C 包围的面积的重心轨迹的半切线为曲面在 r 的仿射法线（Blaschke)。

解 令 $x^1=r\cos\theta$，$x^2=r\sin\theta$，把公式（3.19）重写成形式

$$x^3=\frac{r^2}{2}+\frac{1}{6}Ir^3\cos 3\theta+(4).$$

平面 $x^3>0$（x^3 充分小）的截线是闭曲线，并有

$$r=\sqrt{2x^3}-\frac{1}{3}Ix^3\cos 3\theta+\left(\frac{3}{2}\right),$$

式中$\left(\frac{3}{2}\right)$表示关于 x^3 的次数$\geqslant\frac{3}{2}$的一切项的全体。截线的重心决定于公式

$$\xi^1=\frac{2}{3}\frac{\int_{-\pi}^{+\pi}r^3\cos\theta d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi}r^2d\theta},\quad \xi^2=\frac{2}{3}\frac{\int_{-\pi}^{\pi}r^3\sin\theta d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi}r^2d\theta},\quad \xi^3=x^3.$$

因为主要无穷小是 x^3，所以求得：

$$\xi^1=\left(\frac{3}{2}\right),\qquad \xi^2=\left(\frac{3}{2}\right).$$

b．**双曲的情形**。考虑由渐近曲线构成的小的四边形，它的一个顶点在点 r，两对对边决定于两个有向平面 $(a_1,\ da_1)$（这里 $\omega^1=0$）和 $(a_2,\ da_2)$（这里 $\omega^2=0$）的极限位置。我们得到平面(a_1, a_3)和(a_2, a_3)，则它们的交线是仿射法线（A. Demoulin）。

例2 具有中心的平截线的曲面。只考虑椭圆的情形。假设 $\xi^1(x^3)$和$\xi^2(x^3)$是在曲面 S 关于在它的点 r 的 Frenet 三面形的高 x^3 处的平截线的中心的坐标。曲面经受变换

$$x^1=x^{1'}+\xi^1,\quad x^2=x^{2'}+\xi^2,\quad x^3=x^{3'};$$

S变到S'，并且平行于X^1OX^2的平面与曲面S'的截线的中心曲线是 x^3 轴。我们有

$$x^{3'}=\frac{(x^{1'})^2+(x^{2'})^2}{2}+\frac{1}{6}I((x^{1'})^3-3x^{1'}[x^{2'}]^2)$$
$$+(x^{1'}\xi^1+x^{2'}\xi^2)+\cdots.$$

但是截线的中心同时是它的重心，所以有

$$\xi^1=\left(\frac{3}{2}\right),\quad \xi^2=\left(\frac{3}{2}\right).$$

现在从上面的关系我们得到

$$x^{3\prime}=\frac{(x^{1\prime})^2+(x^{2\prime})^2}{2}+\frac{1}{6}I((x^{1\prime})^3-3x^{1\prime}[x^{2\prime}]^2)+(4).$$

但是S'关于x^3轴对称，所以右边必不包含奇数幂的项；因而，$I=0$，于是曲面是二次曲面（Blaschke）。

让读者证明下列命题：

1° 证明，若$H=0$，则a_2和a_3沿任一渐近曲线$\pi^\alpha=0$，保持平行于一个固定平面。

2° 讨论$(x^1)^3+3x^1x^2-2x^3=0$的度量和周线。

3° 证明非正常仿射球面是一个平移曲面（Reidemeister）。

4° $ds^2=dx^1dx^2$的内在几何容许一个可迁变换群$\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},-x^1\frac{\partial}{\partial x^1},-x^2\frac{\partial}{\partial x^2}\right)$。求它的测地线。

5° 求一切抛物型仿射球面。

6° 求一切双曲型非正常仿射球面。

7° 如果$\alpha=\pi^1\wedge\pi^2$和$N=a_3$，证明公式(2.3.40)，(2.3.41)，(2.3.42)在仿射几何中也是成立的。

第四章　射影微分几何

在本章里，我们研究曲线与曲面在射影变换之下的射影不变量与不变性质。这是本书的重点，特别着重论述我国微分几何学家在这方面的成果。我国微分几何工作者在这个领域中有卓越的成就。最近数十年来，在国内外专刊上发表了不少的科学论文，其中某些成果曾被国内外有关著作及书籍所引用。由于篇幅所限，不能作详尽的介绍，有些仅介绍成果，把参考文献附于书末。

§4.1.　平面曲线的射影微分几何

本节研究平面曲线在射影平面 P^2 上的射影变换群之下的不变性质。P^2 上的射影变换可写为如下的形式：

$$\begin{aligned} x_1^* &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2^* &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3^* &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \qquad A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

或即

$$x^* = xA.$$

由此可见，P^2 上的射影群具有八个本质参数，记作 G_8。在射影几何里，我们知道，在射影群之下，没有距离、角度、面积、向量、平行等概念。但有四个元素（例如在同一直线上的四点或通过同一点的四条直线）的交比等概念。

设 $x(x_1, x_2, x_3)$，$y(y_1, y_2, y_3)$，$z(z_1, z_2, z_3)$ 为平面 P^2 上任意三个不共线的点，则 P^2 上任意一点 r 的射影齐法坐标可表为如下的形式，

$$r = \xi_0 x + \xi_1 y + \xi_2 z.$$

关于曲线的射影微分几何的研究始于 Halphen[1]；但Wilczynski[1]作了系统的研究；Sannia[1,2]采用另外的方式建立了曲

线论。这里采用苏步青所建立的方法，这个方法可以推广到高维空间的射影曲线论。

1．平面曲线的解析基础。[1]**射影协变元素和不变式的几何意义** 这一段的主要内容是按照方德植[4]的一篇论文而叙述的。

（1）解析基础与活动标架．设$P(x)$为一已知平面曲线C上一个正常点，$P_1(x_1)$是在C的切线t上异于P的一点，$P_2(x_2)$是从P_1作C在P的密切二次曲线K_2的切线的切点。这样三角PP_1P_2构成曲线C的活动标架$\mathscr{R}$，由于这种三角形由切线t上的点P决定，所以在曲线C上一点有∞^1个$\mathscr{R}$。平面上任意一点$M(Z)$的射影齐次坐标可表示为如下的形式：

$$Z=\xi_0x+\xi_1x_1+\xi_2x_2, \tag{1.1}$$

式中ξ_0，ξ_1，ξ_2表示M关于具有单位点$x+x_1+x_2$的标架$\mathscr{R}$的局部坐标。如果导入非齐次坐标ξ，η：

$$\xi=\frac{\xi_1}{\xi_0},\qquad \eta=\frac{\xi_2}{\xi_0}, \tag{1.2}$$

并设M是C上P的一个邻点，则C的方程取形式

$$\eta=\frac{1}{2}\xi^2+\theta_3\xi^5+a_6\xi^6+(7), \tag{1.3}$$

式中(n)表示关于ξ的次数$\geqslant n$的全部，并且K_2由

$$\xi^2-2\eta=0 \tag{1.4}$$

给出。

现在假定曲线C上一个一般点的坐标x是一个参数u的函数。坐标为$x'=\dfrac{dx}{du}$的点是在C的切线t上，取它为$P_1(x_1)$，所以我们得相应的标架$\mathscr{R}$。容易看到点x'的位置与参数的变换

$$\bar{u}=f(u) \tag{1.5}$$

无关，因而标架$\mathscr{R}$的决定也与参数的取法无关。但是它们与比例因子的变换

1）关于平面曲线论的解析基础早已见于1937年浙江大学苏步青教授的讲义，同时在方德植上述论文中也曾作过扼要的叙述，而详细的论述可参见苏步青〔1〕中第一章。

$$\bar{x} \doteq \lambda x \tag{1.6}$$

有关。

我们把P的射影齐次坐标标准化使得展开式(3)化为形式

$$y = \frac{1}{2}\xi^2 + \theta_3\xi^5 + (7), \tag{1.7}$$

那末除一个常数外，得到比例因子的一个完全决定法。这样，我们建立了P的法坐标，对应于标准化的点P_1的活动标架$\mathscr{R}$是曲线C在P点的Wilczynski的规范三角形，直线PP_2是射影法线。

不难证明无穷小

$$d\sigma = \sqrt[3]{\theta_3}\,du \tag{1.8}$$

是曲线的一个不变式，称为C的射影弧素。

若取由（1.8）所确定的射影弧σ为参数，则表达式（1.7）变为

$$\eta = \frac{1}{2}\xi^2 + \xi^5 + (7), \tag{1.9}$$

以及射影Frenet公式取如下的形式：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\sigma} = x_1, \\ \dfrac{dx_1}{d\sigma} = kx + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{d\sigma} = 20\,x + kx_1, \end{cases} \tag{1.10}$$

式中k称为曲线C的射影曲率。从（1.10）导出法坐标x是微分方程

$$\frac{d^3x}{d\sigma^3} - 2\,k\,\frac{dx}{d\sigma} - \left(\frac{dk}{d\sigma} + 20\right)x = 0 \tag{1.11}$$

的解，（1.11）称为曲线的法式方程。

根据以上的讨论，得到射影平面曲线的基本定理：

定理4.1 在闭区间$a \leqslant \sigma \leqslant b$上给定任意一个连续函数$k(\sigma)$，则除了平面上的射影变换外，唯一地存在一条平面曲线，

以 σ 为射影弧，$k=k(\sigma)$ 为射影曲率。

曲线的决定归于祛式方程（1.11）的线性无关的解的决定。因此，称 $k=k(\sigma)$ 为曲线的射影自然方程。

（2）射影弧与射影曲率的表达式。设曲线 C 的参数表示是 $x^i=x^i(u)(i=1,2,3)$，则可决定这样的 u 的三个函数 p，q，l，使得

$$x'''+3px''+3qx'+lx=0. \tag{1.12}$$

实际上，p，q，l 决定于方程组

$$x^{1'''}+3px^{1''}+3qx^{1'}+lx^1=0,\ x^{2'''}+\cdots=0,\ x^{3'''}+\cdots=0.$$

这个组容有唯一的解，如果行列式

$$|x,\ x',\ x''|\neq 0,$$

即曲线不是直线。这时，我们有

$$3p=-|x,x',x'''|:|x,x',x''|,$$
$$3q=+|x,x'',x'''|:|x,x',x''|,$$
$$l=-|x',x'',x'''|:|x,x',x''|.$$

为了决定 $\sigma(u)$ 和 $k(u)$，从曲线的已知表达式出发，令 $x=\lambda z$，则有（以 $'$ 表示关于 u 求导）：

$$\frac{dx}{d\sigma}=\frac{\lambda'}{\sigma'}Z+\frac{\lambda}{\sigma'}Z',$$

$$\frac{d^2x}{d\sigma^2}=\left(\frac{\lambda''}{\sigma'^2}-\frac{\lambda'\sigma''}{\sigma'^3}\right)Z+\left(\frac{Z\lambda'}{\sigma'^2}-\frac{\lambda\sigma''}{\sigma'^3}\right)Z'+\frac{\lambda}{\sigma'^2}Z'',$$

$$\frac{d^3x}{d\sigma^3}=\left(\frac{\lambda'''}{\sigma'^3}-\frac{3\lambda''\sigma''}{\sigma'^4}-\frac{\lambda'\sigma'''}{\sigma'^4}+\frac{3\lambda'\sigma''^2}{\sigma'^5}\right)Z$$
$$+\left(\frac{3\lambda''}{\sigma'^3}-\frac{6\lambda'\sigma''}{\sigma'^4}-\frac{\lambda\sigma'''}{\sigma'^4}+\frac{3\lambda\sigma''^2}{\sigma'^5}\right)Z'$$
$$+\left(\frac{3\lambda'}{\sigma'^3}-\frac{3\lambda\sigma''}{\sigma'^4}\right)Z''+\frac{\lambda}{\sigma'^3}Z'''.$$

把这些关系代进（1.11）中并写成（1.12）的形式，比较系数，就推出

$$
\begin{cases}
\dfrac{\lambda'}{\lambda}-\dfrac{\sigma''}{\sigma'}=p, \\
3\dfrac{\lambda''}{\lambda}-6\dfrac{\lambda'}{\lambda}\dfrac{\sigma''}{\sigma'}-\dfrac{\sigma'''}{\sigma'}+\dfrac{3\sigma''^2}{\sigma'^2}-2k\sigma'^2=3q, \\
\dfrac{\lambda'''}{\lambda'}-3\dfrac{\lambda''}{\lambda}\dfrac{\sigma''}{\sigma'}-\dfrac{\lambda'}{\lambda}\dfrac{\sigma'''}{\sigma'}+\dfrac{3\lambda'}{\lambda}\dfrac{\sigma''^2}{\sigma'^2} \\
\qquad -2\dfrac{\lambda'}{\lambda}k\sigma'^2-\left(\dfrac{k'}{\sigma'}+20\right)\sigma'^3=l.
\end{cases}
\tag{1.13}
$$

从其中第一式求出$\frac{\lambda'}{\lambda}$，然后求导得出$\frac{\lambda''}{\lambda}$，其次求出$\frac{\lambda'''}{\lambda}$，把第二次求导，并利用第二式与第三式消去$k$和$k'$，随后经过一些实际计算，求得

$$
\sigma'^3=\frac{1}{20}\left(l-3pq-\frac{3}{2}q'+2p^3+3pp'+\frac{p''}{2}\right)=h, \tag{1.14}
$$

则从$(1.13)_2$给出

$$
k=-\frac{h^{-\frac{2}{3}}}{2}\left[3q-3p'-3p-\frac{2}{3}\left(\frac{h'}{h}\right)'\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{9}\left(\frac{h'}{h}\right)^2\right]. \tag{1.15}
$$

最后，从(1.13)，除一个因子外，可决定λ。

特别，当曲线由方程

$$
x=x^0+xx_1^0+yx_2^0
$$

给出时，其中y是x的函数，我们求得

$$
p=-\frac{1}{3}\frac{y'''}{y''},\quad q=0,\quad l=0,
$$

为了方便，令$(y'')^{-\frac{2}{3}}=Y$，则求得

$$
h=\frac{1}{80}\frac{Y'''}{Y}.
$$

由此，我们看到$h=0$的曲线是二次曲线；它们的微分方程是

$$
\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'''=0\ (\text{A. Monge}).
$$

（3）射影法线的几何意义。关于射影法线，Sannia[1]首先采用有结点的八点三次曲线给出它的一个简单的几何意义：一条三次曲线$C_3^{(7)}$与曲线C在点P构成八点（7阶）接触，且以P为结点，则$C_3^{(7)}$与C不相切的一支的切线为C在P的射影法线。但是射影法线只由曲线C在P的6阶邻域可以完全决定的，而Sannia的定义用到7阶邻域。Terracini[1]也给出一个具体的定义，可是他利用某种直射变换来代替纯粹几何图形。Bompiani[1]首先从两条平面曲线的接触理论导出平面曲线的各协变元素的几何解释；将在下节作详细的介绍。Sannia的定义后来为Kawaguchi[1]所改进，他只用到七点（6阶）三次曲线来决定射影法线，最后，由著者作进一步的改进，给出了更精确而简洁的解释，兹述之如下：

设C_3为曲线C在P点的任一七点三次曲线，则利用(1.9)可以求得C_3的方程取如下的形式：

$$\xi^3+16\eta^3-2\xi\eta+\mu(\xi^2\eta-2\eta^2)+\nu(8\xi\eta^2+\xi^2-2\eta)=0, \tag{1.16}$$

式中μ，ν为两个独立参数。C_3与C的密切二次曲线K_2交于P点和另一点S；则由（1.4）与（1.16）得到直线PS的方程：

$$2\eta+\nu\xi=0.$$

又C_3与C在P的切线PP_1交于P和另一点T；则不难求出T关于C_2的极线PR的方程为

$$\eta+\nu\xi=0.$$

因切线PP_1和射影法线PP_2的方程分别是$\eta=0$和$\xi=0$。所以四条直线PT，PR，PS和PP_2是调和共轭的，于是得到如下所述的方德植定理：

定理4.2 设C_3为曲线C在其正常点P的任一七点三次曲线，T，S分别为C_3与C在P的切线和密切二次曲线除P外的交点，若PR是T关于K_2的极线，则直线PS关于PT，PR的调和共轭直线就是C在P的射影法线。

现在从（1.16）中∞^2条三次曲线中取出∞^1条三次曲线，使

得通过PP_1上一固定点T（c，0）；每条曲线的方程是：

$$\xi^3+16\eta^3-2\xi\eta+\mu(\xi^2\eta-2\eta^2)-c(8\xi\eta^2+\xi^2-2\eta)=0,$$

式中μ是一参数。这∞^1条曲线的第九附属点S一定落在K_2上，它的坐标是

$$\xi=c,\quad \eta=\frac{1}{2}c^2.$$

定理4.3 当点T在切线上变动时，ST构成一个直线束；它的中心是射影法线与K_2的第二交点。这是由张素诚[3]所指出的关于射影法线的一个简明的解释。

（4）射影曲率的几何意义。当P画曲线C时，则以C_1，C_2分别表示P_1和P_2的轨迹。引用（1.10）得到C_1在P_1的切线t_1的方程：

$$\xi_0-k\xi_2=0,$$

又C_2在P_2的切线t_2的方程为

$$k\xi_0-20\xi_1=0.$$

设t_2和t的交点记作R'，则其坐标为

$$\xi_0=20,\quad \xi_1=k,\quad \xi_2=0.$$

设R_1为直线t_1和t_2的交点，则R_1的坐标为

$$\xi_0=k,\quad \xi_1=\frac{k^2}{20},\quad \xi_2=1.$$

从此与（1.4）得到R_1关于K_2的极线方程：

$$\xi_0-\frac{k^2}{20}\xi_1+k\xi_2=0,$$

它与t的交点R''的坐标为

$$\xi_0=\frac{k^2}{20},\quad \xi_1=1,\quad \xi_2=0.$$

因而得到P，P_1，R'，R''四点的交比：

$$(PP_1,\ R'R'')=\frac{k^3}{400},$$

或即

$$k^3=400(PP_1,\ R'R'').$$

从此导出作者的另一定理：

定理4.4 设 R_1 为曲线 C_1，C_2 在 P_1，P_2 的切线的交点，R' 与 R'' 分别为切线 t 和直线 t_2 与 R_1 关于 K_2 的极线的交点，则射影曲率 k 的立方除一常数因子400外，等于 P，P_1，R'，R'' 四点的交比。

（5）射影弧素的几何意义．利用前定理中所述诸元素可以得到射影弧素 $d\sigma$ 的解释。通过点 R_1 而在 P_1 和 P_2 分别与直线 PP_1 和 PP_2 相切作一二次曲线 K，则由简单的计算可知 K 的方程为

$$\xi_0^2-20\xi_1\xi_2=0. \tag{1.17}$$

令 $Q(x(\sigma+d\sigma))$ 为曲线 C 上 P 的邻点，由（1.10）得

$$x(\sigma+d\sigma)=\{1+(2)\}x+\{d\sigma+(3)\}x_1+\left\{\frac{d\sigma^2}{2}+(3)\right\}x_2, \tag{1.18}$$

即直线 PQ 上任何一点的坐标为

$$\xi_0=\rho+1+(2),\quad \xi_1=d\sigma+(3),\quad \xi_2=\frac{d\sigma^2}{2}+(3), \tag{1.19}$$

ρ 是一个参数．设 Q_1，Q_2 为直线 PQ 与二次曲线 K 的交点，则由（1.17）和（1.19）可知 Q_1，Q_2 的对应参数必满足方程

$$\{1+\rho+(2)\}^2=10d\sigma^3+(4),$$

或即

$$\rho=-1\pm\sqrt{10d\sigma^3}+(2),$$

所以 P，Q，Q_1，Q_2 四点的交比

$$(PQ,Q_1Q_2)=\frac{1+\sqrt{10d\sigma^3}+(2)}{1-\sqrt{10d\sigma^3}+(2)}=1+2\sqrt{10d\sigma^3}+(2),$$

因而我们有

$$\ln(PQ,\ Q_1Q_2)=2\sqrt{10d\sigma^3}+(2),$$

就是

定理4.5 设 Q 为曲线 C 上 P 的邻点，其所对应的参数为

$\sigma+d\sigma$，设二次曲线K与PP_1，PP_2分别在P_1，P_2相切，并通过t_1，t_2的交点，若直线PQ与K交于Q_1,Q_2，则无穷小$\ln(PQ, Q_1Q_2)$的主要部分的平方，除了一个常因子40外，等于射影弧素的立方。

（6）曲率形式的几何意义．最后给出曲率形式$kd\sigma^2$的几何意义。

曲线C在$Q(x(\sigma+d\sigma))$的切线上任何一点的坐标为

$$\rho x(\sigma+d\sigma)+x'(\sigma+d\sigma),$$

ρ为一参数．若把这些坐标写为形式

$$\xi_0 x+\xi_1 x_1+\xi_2 x_2,$$

则由泰勒展开及(1.10)，(1.11)就可得到

$$\begin{cases}\xi_0=\rho+kd\sigma+(2),\\ \xi_1=\rho\left\{d\sigma+\dfrac{k}{3}d\sigma^3+(4)\right\}+1+kd\sigma^2+(3),\\ \xi_2=\rho\left\{\dfrac{d\sigma^2}{2}+\dfrac{k}{12}d\sigma^4+(5)\right\}+d\sigma+\dfrac{k}{3}d\sigma^3+(4).\end{cases}\tag{1.20}$$

设曲线C在Q点的切线与直线t_1，P_1P_2，PP_1，PP_2的交点分别为Q_1，Q_2，Q_3，Q_4，则由（1.18）和（1.20）得到Q_1的对应参数

$$\rho_1=(2).$$

同理可得Q_2，Q_3，Q_4的对应参数值：

$$\rho_2=-kd\sigma+(2),$$

$$\rho_3=-\frac{2}{d\sigma}\left\{1+\frac{k}{6}d\sigma^2+(3)\right\},$$

$$\rho_4=-\frac{1}{d\sigma}\left\{1+\frac{2}{3}kd\sigma^2+(3)\right\}.$$

由上列两式得到Q_1，Q_2，Q_3，Q_4四点的交比

$$(\rho_1\rho_2,\rho_3\rho_4)=1-\frac{k}{2}d\sigma^2+(3),$$

或即

$$\ln(\rho_1\rho_2,\rho_3\rho_4)=-\frac{1}{2}kd\sigma^2+(3)。$$

故得

定理4.6 若Q_1，Q_2，Q_3，Q分别是C在P的切线t，P_1P_2，P_1P，PP_2与曲线C在点Q的切线的交点，则无穷小$\ln(Q_1Q_2,Q_3Q_4)$的主要部分除了一个常因子$-\frac{1}{2}$外，等于曲率形式$kd\sigma^2$。

在点P与曲线C构成八点（七阶）接触的三次曲线共有∞^1条，它们的方程是

$$\xi^3+16\eta^3-2\xi\eta+\mu\left(-\frac{1}{7}k\xi^2\eta+\xi^2+\frac{2}{7}k\eta^2-2\eta\right)=0,\tag{1.21}$$

式中μ表示任意常数：在这∞^1条曲线中有两条值得注意的三次曲线：

1）Wilczynski[1]的三次曲线。这是以P为结点的唯一的八点三次曲线，它的方程是

$$\xi^3+16\eta^3-2\xi\eta=0。$$

Sannia指出，这条曲线在P点两条结点切线，就是原曲线C在P的切线和射影法线。这样就证明了在本段（3）中开头所述的定理。此外，这条曲线的三个变曲点在直线

$$\xi_0=0$$

上，即在标准三角形的第三边P_1P_2上。P点与每个变曲点$I_j(j=1,2,3)$的三条连线的方程是

$$\xi^3+16\eta^3=0。\tag{1.22}$$

2）在P点以外的一点与射影法线相切的三次曲线。张素诚在上面所引证的论文中研究了与射影法线相切的八点三次曲线，而且证明了这种曲线只有两条，就是Wilczynski的三次曲线和另一条：

$$k^2(\xi^3+16\eta^3-2\xi\eta)-224(-k\xi^2\eta+56\xi\eta^2+7\xi^2+2k\eta^2-14\eta)=0,$$

它与射影法线在点$M\left(0,\ \frac{14}{k}\right)$相切．又在曲线$C$的七点三次曲线中，以射影法线上一点$N$（不重合于$P$）为结点，确定一条三次曲线，则除一个常数因子外，射影曲率k等于P，P_2，M，N四点的交比。

此外，他还引用了这三次曲线解释了曲率形式$kd\sigma^2$。

最后，我们还要给出射影曲率的另外的几个几何解释。

因为所有的八点三次曲线（1.21）通过曲线C在P的八个邻近点，因而可以看作在P有八个公共点，所以八点三次曲线有一个第九附属点，称为曲线C与P点相联系的Halphen[2]点，记作H. 从（1.21）不难求出H的坐标：

$$\xi_0=2^5\cdot 7^3+k^3,\quad \xi_1=2^3\cdot 7^2 k,\quad \xi_2=7k^2.$$

利用（1.22）所定义的三条直线PI_j和点H可以解释k：

设D_j（$j=1,\ 2,\ 3$）是四条直线PP_1，PP_2，PH，PI_j的交比，则

$$k=-14\sqrt[3]{4}\ \sqrt{D_1D_2D_3};$$

又设I是Wilczynski三次曲线的唯一实变曲点，则

$$k=-14\sqrt[3]{4}\,P(P_1P_2,\ HI)$$

成立。见Vyčichlo〔1〕，〔2〕。

2．两条平面曲线的接触不变式 如果两条平面C，$\overline{C}$在一公共点O构成一阶或更高阶的接触，那末C，$\overline{C}$有一个与O相联系的射影接触不变式。由于构成一阶接触的情形最简单，所以就从这个情形开始叙述。

设曲线C的参数向量方程为

$$x=x(u),$$

并设对C的比例因子与参数的变换为

$$x=\lambda(u)\bar{x},\quad \bar{u}=\bar{u}(u)\qquad\left(\lambda\frac{d\bar{u}}{du}\neq 0\right).$$

对于曲线$\overline{C}$我们有相应的方程和变换：

$$y=y(v),$$

$$y=\mu(v)\bar{y},\quad \bar{v}=\bar{v}(v)\qquad \left(\mu\frac{d\bar{v}}{dv}\neq 0\right).$$

假定曲线C和$\bar{C}$在公共点O有$u=0$，$v=0$；而且在O点构成一阶接触，因而两曲线在O点有共同切线t。那末存在三个数l，m，n，使得在O有

$$lx(o)=y(o),\quad x_u(o)=my_v(o)+ny(o),$$

式中
$$x_u=\frac{dx}{du},\quad y_v=\frac{dy}{dv}.$$

施行上列比例因子和参数的适当变换后，我们可以把l和m化为1，并使n化为o；因此，变换后得到

$$\bar{x}(o)=\bar{y}(o),\quad \bar{x}_{\bar{u}}(o)=\bar{y}_{\bar{v}}(o).\qquad (*)$$

事实上，这些变换只受下列条件所限制：

$$\lambda(o)l=\mu(o);$$
$$\bar{u}_u(o)\lambda_{\bar{u}}(o)=\bar{v}_v(o)\mu_{\bar{v}}(o)m+n\mu(o),$$
$$\bar{u}_u(o)\lambda(o)=\bar{v}_v(o)\mu(o)m,$$

这里已假定，当$u=0$，$v=0$时，$\bar{u}=0$，$\bar{v}=0$。保留形式（*）的最一般的比例因子和参数的变换是服从下列条件：

$$\lambda(o)=\mu(o),\quad \lambda_{\bar{u}}(o)=\mu_{\bar{v}}(o),$$
$$\bar{u}_u(o)=\bar{v}_v(o).\qquad (**)$$

我们把方程（*）中的横线去掉，而回到原来的记号，则（*）可写为

$$x=y,\quad x_u=y_v,\qquad (***)$$

但是要记住这些方程只在O点成立。引用这个约定，我们来定义一个函数J如下：

$$J=\frac{(x,\ x_u,\ x_{uu})}{(y,\ y_v,\ y_{vv})}.$$

这个函数J在任何射影变换之下，显然是不变的。现在我们来证明，在满足条件（**）的一切比例因子和参数的变换之下也是不变的。事实上，下面的简单计算足以证明这个不变性（见Fubini-Čech〔Ⅱ〕，1931，3，p.18）：

$$\bar{J}=\frac{(\bar{x},\ \bar{x}_{\bar{u}},\ \bar{x}_{\bar{u}\bar{u}})}{(\bar{y},\ \bar{y}_{\bar{v}},\ \bar{y}_{\bar{v}\bar{v}})}=\frac{\left(\frac{x}{\lambda},\ \left(\frac{x}{\lambda}\right)_{\bar{u}},\ \left(\frac{x}{\lambda}\right)_{\bar{u}\bar{u}}\right)}{\left(\frac{y}{\mu},\ \left(\frac{y}{\mu}\right)_{\bar{v}},\ \left(\frac{y}{\mu}\right)_{\bar{v}\bar{v}}\right)}$$

$$=\frac{(x,\ x_{\bar{u}},\ x_{\bar{u}\bar{u}})\lambda^{-3}}{(y,\ y_{\bar{v}},\ y_{\bar{v}\bar{v}})\mu^{-3}}=\frac{(x,\ x_u,\ x_{uu})\bar{u}_u^{-3}}{(y,\ y_v,\ y_{vv})\bar{v}_v^{-3}}=J.$$

函数J称为曲线C和$\overline{C}$在O点的接触不变式。由于条件(* * *)，J的定义可改写为

$$(x,\ x_u,\ x_{uu}-Jy_{vv})=0.$$

特别是，若曲线C和$\overline{C}$的方程用非齐次射影坐标来表达：

$$y=y(x),\quad Y=Y(X),$$

并且这些曲线在公共点O有共同切线，则在O点有

$$x=X,\quad y=Y,\quad y'=Y'\left(y'=\frac{dy}{dx},\ Y'=\frac{dY}{dX}\right),$$

因此，我们有

$$J=\frac{y''}{Y''}.$$

最后，若曲线C和$\overline{C}$关于非齐次射影坐标的方程分别为

$$y=ax^2+\cdots,\quad Y=AX^2+\cdots\ (a\neq A,\ aA\neq 0).$$

则上式变为

$$J=\frac{a}{A}.$$

设C，$\overline{C}$在O点构成$k(>0)$阶接触，并令其在$O(0,0)$的邻域中的展开式分别为

$$y=ax^{k+1}+\cdots,\quad Y=AX^{k+1}+\cdots$$

$$(k>0,\quad a\neq A,\quad aA\neq 0).$$

C. Segre[1] 对接触不变式$\frac{a}{A}$给出一个几何意义：

在O的附近取一直线r与C，$\overline{C}$以及切线t，分别交于P，$\overline{P}$与T，在r上任取一点M，当T趋于0时，则交比

$$(P\overline{P},\ TM)\longrightarrow\frac{a}{A},$$

假定 r 的极限位置不重合于公共切线 t，而且M的极限位置不重合于O。

因为交比是一射影不变式，因而$\frac{a}{A}$是一射影不变式。

后来，Bompiani[1]为了解释一条平面曲线的射影不变式和射影协变图形建立了两条平面曲线C，$\overline{C}$ 的接触理论。他指出：当C，$\overline{C}$ 在一点O构成k阶接触时，由C，$\overline{C}$ 的$k+2$阶邻域可以决定通过O的一条协变直线$r_0^{(k)}$。在 $k=1$ 的情形下，他已经得到了一个简单的几何作图：

在切点O分别作C，$\overline{C}$ 的任意四点二次曲线，且从O联结这两条二次曲线的其余两个交点，则$r_0^{(1)}$ 是公共切线关于这两条直线的调和共轭直线。

可是在$k>1$的情况下，那就是C,$\overline{C}$ 在O点具有高阶接触，要寻求$r_0^{(k)}$的解释颇感困难。熊全治[1]首先研究直线$r_0^{(2)}$和$r_0^{(3)}$，然后决定$r_0^{(4)}$。他为了解释$r_0^{(2)}$除了利用C，$\overline{C}$ 在O点的密切二次曲线外，还运用了C,$\overline{C}$ 在O的具有某些条件的五点三次曲线。事实上，直线$r_0^{(2)}$是单用C，$\overline{C}$ 在O点的四阶邻域所决定的，密切二次曲线一定可以解释的。后来姚敬之[1]得到了简单的结果：

若曲线C，$\overline{C}$ 在O点构成二阶接触，则C，$\overline{C}$ 在O点的密切二次曲线C_2，$\overline{C}_2$除O外还交于一点P，以K_3与$\overline{K}_3$分别表示由直线OP和$\overline{C}_2$与由OP和C_2所组成的三次曲线；此外，在C，$\overline{C}$ 的公共切线t上指定不重合于O的任何一点为“无穷远点”I，作I关于K_3与$\overline{K}_3$的极线l，$\overline{l}$，则公共切线t关于l，$\overline{l}$的调和共轭直线就是协变直线$r_0^{(2)}$。

3. 平面曲线的奇点 在曲线的射影微分几何中，总是考虑正常点，然而从代数学的结构来看，研究平面曲线的奇点的性质是属于射影微分几何的范围；这是由于奇点经过射影变换后仍为奇点。就是研究空间曲线与曲面的一般理论中也经常涉及奇点的产生。例如，在空间曲线的一正常点引它的密切平面，从这个平面上任意一点把曲线射影到另一平面上，所得到的射影曲线必有一

个变曲点（拐点）；又如，若通过曲面上一点的渐近切线引不重合于切面的任一平面时，它与曲面的交线必有一个变曲点。

Bompian[2]最早注意到这种情况，而把一条平面曲线在它的变曲点邻域的状况加以详细的研究，从而建立了一些几何元素来刻划曲线在它的变曲点的各阶邻域，这些元素总称为Bompiani密切图形。苏步青[6]首先用这些图形很成功地建立起空间曲线的新理论，详细内容留在后面再讲，同时，他又把Bompiani密切图形的概念推广到平面曲线的高阶奇点[7]，并应用所得到的理论来建立高维空间曲线的理论[10]。

（1）平面曲线的可表示奇点。这里先叙述他怎样把Bompiani密切图形推广到具有一个m阶奇点的平面曲线。

设O是平面曲线C的一个m阶奇点，就是C在O的切线t_0与C有（$m-1$）阶接触，但$m\geqslant 3$。若取O为原点，t_0为x轴，则C在O的邻域的展开式可写为

$$y=x^m\cdot a_v x^v$$

$$(m\geqslant 3,\quad v=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ a_0\neq 0).$$

特别，当$m=3$时，O就是C的变曲点，则可以证明〔见苏步青〔I〕33—35〕。

定理4.7 设O是平面曲线C的$m\geqslant 3$阶奇点，若一条m次代数曲线C_m以不在t_0上一点M为（$m-1$）重点，而在M的各支线有同一切线t，而和C在O具有（$m+1$）阶接触。若考虑对一切点M的所有C_m，则这些曲线C_m的切线t和t_0必交于一定点O_{m+1}，它的坐标是：

$$x=\frac{(m-1)a_0}{a_1},\quad y=0. \tag{1.23}$$

若曲线C的展开式中最初（$m-1$）个系数满足下列（$m-3$）个条件：

$$(-1)^{p-\nu}a_\nu\binom{m-1}{p-\nu}\left[\frac{a_1}{(m-1)a_0}\right]^{p-\nu}=0$$

$$(p=2,\ 3,\ \cdots,\ m-2), \tag{1.24}$$

这时称O为曲线C的m阶可表示奇点。我们有

定理4.8 设O是平面曲线C的m阶可表示奇点，且C_m是定理 4.7 中所述的一条代数曲线，则凡与C在O做成（2m－1）阶接触的一切C_m的（$m-1$）重点M的轨迹是通过O的一条直线l_{2m-1}，它的方程是

$$y\cdot(-1)^{m-\nu}a_\nu\binom{m-1}{\nu}\left[\frac{a_1}{(m-1)a_0}\right]^{m-1-\nu}-ma_0^2x=0. \tag{1.25}$$

在直线l_{2m-1}上存在一点O_{2m}，使得以点O_{2m}做（$m-1$）重点M的曲线C_m与C在O构成$2m$阶接触。O_{2m}的坐标是

$$x_0=\frac{m-1}{mP}(-1)^{m-\nu}\binom{m-1}{\nu}a_\nu\left[\frac{a_1}{(m-1)a_0}\right]^{m-\nu-1}$$
$$(\nu=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1), \tag{1.26}$$

$$y_0=\frac{(m-1)a_0^2}{P},$$

式中

$$P=(-1)^{m-\nu-1}\binom{m-1}{\nu}\left[\frac{a_1}{(m-1)a_0}\right]^{m-\nu-1}$$
$$\times\left[a_{\nu+1}-\frac{(m+1)a_1}{ma_0}a_\nu\right]. \tag{1.27}$$

最后，由C在O的$2m$阶邻域唯一地决定一个与C射影联系的三角形$OO_{m+1}O_{2m}$，且取$OO_{m+1}O_{2m}$为参考三角形，获得曲线的半规范展开：

$$y=a_0x^m+a_{m+1}x^{2m+1}+\cdots. \tag{1.28}$$

应当指出，在$m=3$时，关于曲线C的变曲点O没有另加条件的必要。就是说，变曲点是可表示的。这时，如 Bompiani 所指出的，时常存在直线l_5和点O_6；这两个元素和点O_4构成所谓 Bompiani 密切图形。

（2）平面曲线的不可表示奇点。若曲线C的m阶不满足(1.24)的$m-3$个条件，这种点称为不可表示的奇点。张素

诚[4]利用了有两个多重点的某种代数曲线来研究不可表示奇点的本质；获得了一系列结果，并推广了上述的曲线C在可表示奇点的密切图形O_{m+1}，l_{2m-1}，O_{2m}等，他在另一篇论文中还给出可表示奇点所满足的$m-3$个条件的几何解释[6]。

（3）平面曲线的尖点。平面曲线的奇点的种类很多。在上面所述的奇点S_1^m的一个推广是奇点S_n^m。那就是在这种点的邻域中曲线的参数方程可写成如下的展开形式：

$$x = t^n, \quad y = t^m a_\nu t^\nu \ (\nu = 0, \ 1, \ \cdots),$$

这里$m > n \geqslant 1$，$m \geqslant 3$。在这种奇点S_n^m中最简单的奇点当然是尖点：那就是$n = 2$，$m = 3$的情形。I. Popa[1]在 Bompiani 的指导之下，已经建立了一条平面曲线在它的尖点O的邻域的理论，获得了代表C在O的六阶邻域的一条协变直线（d）和由八阶邻域所决定的二主点O_1和O_2，同时得出C的规范展开：

$$x = t^2, \quad y = t^3 + et^7 - et^8 + (9), \tag{1.29}$$

式中各系数都是曲线C在O点的不变式的值。

此外，张素诚[2]采用了具有三个尖点而尖点切线会于一点的四次代数曲线，也建立起以上的理论。

（4）奇点的研究在空间曲线的切线面上的应用。关于空间曲线的切线面被某平面所截开的平截线所产生的各种协变图形的研究曾获得了各种各样的有趣的构图。Wilczynski[1]首先利用了空间曲线Γ的切线面以其在正常点P的密切平面所截开的平截线Γ_0，并称Γ_0在P的密切二次曲线为Γ的密切二次曲线，可见，如果讨论切线面被通过P的某平面π所截开的其他截线是以P为奇点，那末上述关于奇点的讨论就有可能应用到各种不同的情况，例如平面π通过Γ在P的切线t的情形，那末各平截线以P为变曲点，于是各条平截线就有 Bompiani 密切图形O_4，l_5，O_6。苏步青[1,4,8]首先得到下述结果：

定理4.9 当平面π绕Γ在P的切线旋转时，切线面T被π所截开的平截线所对应的点O_4与π构成射影对应B；直线l_5的轨迹是Γ在P的密切二次锥面（即以P为顶点的七点二次锥面）；O_6

的轨迹是一条三次空间曲线。

还有，曲线Γ在P点的四阶邻域可以决定这样的一个配极Π：Γ的切线上一点P_1与通过P而落在切面上的一直线t_n关于Γ_0在P的四点二次曲线有极与极线的关系。

若平面π通过Γ上的点P而不包含Γ在P的切线t，则π与Γ的切线面T的平截线以P为尖点，于是对于各平截线 Popa 的密切图形，那就是协变直线（d）及二主点O_1，O_2，当π绕O旋转时，则直线（d）常在一平面ω_n上，而π和密切平面的交线t_n与ω_n之间构成一个射影对应C；而且对应C是上面所述的对应Π与B的乘积。

后来方德植[10]指出：直线t_n与平面ω_n之间的对应C就是关于曲线Γ在P点的四阶密切二次锥面的配极。

此外，根据定义，射影对应B是由曲线Γ在P的四阶邻域决定的。但是B与Γ的五阶邻域所决定的密切线丛（即由Γ在P的五条邻近切线决定的线丛）有关。就是t上任何点P_1关于这线丛的零平面重合于P_1在B下的对应平面π。

如果以一般平面α来代替过P点的平面π，则由平面α与切线面T的平截线所产生的构图自然不同。Bompiani[4]最早开始研究，后由苏步青给出一些补充：若以Γ_α表示以平面α与切线面T的截线，以C_α表示由P点射影曲线Γ到平面α上的射影，则C_α与Γ_α在Γ的切线与平面α的交点P_α处相切，于是在P_α的三阶邻域决定协变直线r_0与一协变点Q_α。Bompiani 得到这样的结果：对于曲线Γ的一般点P和空间的∞^3个平面α只有∞^2条协变直线r_0，它们构成∞^1个直线束，其中心P_α在Γ的切线t上，且r_0所在的平面π通过t，P_α与π组成射影对应。苏步青指出了这个对应就是上述的对应B；在同一论文中，他还阐明协变点Q_α都在Γ的密切平面上，而点P_α与直线PQ_α之间的对应，是配极Π[8]。

4．平面曲线对　以下介绍具有各种情况的一对平面曲线。

（1）在两个正常点具有公共切线的一对平面曲线。

熊全治[6]研究了一对平面曲线在两个正常点具有公共切线的情形。从而获得了由两条曲线的四阶邻域所决定的两个射影不变式I_1和I_2。他取所考虑的两个正常点O_1和O_2为参考三角形的顶点（1，0，0）和（0，1，0），于是曲线对C和C^*在点O_1和O_2的邻域中的展开式分别可写为如下的形式：

$$C: \quad \frac{x_3}{x_1}=a_1\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2+a_2\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3+a_3\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^4+\cdots,$$

$$C^*: \quad \frac{x_3}{x_2}=a_1^*\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+a_2^*\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+a_3^*\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4+\cdots,$$

其中$a_1a_1^*\neq 0$。

上述两个不变式I_1和I_2分别为

$$I_1=\frac{1}{(a_1^2a_1^*)^{1/3}}\left(\frac{a_1a_2^*}{2a_1^*}-\frac{5}{4}\frac{a_1^*a_2^2}{a_1^2}+\frac{a_1^*a_3}{a_1}\right)$$

和

$$I_2=\frac{1}{(a_1a_2^*)^{1/3}}\left(\frac{a_1^*a_2}{2a_1}-\frac{5}{4}\frac{a_1a_2^{*2}}{a_1^{*2}}+\frac{a_1a_3^*}{a_1^*}\right).$$

其次，他取适当的参考三角形$\{O_1, O_2, O_3\}$把不变式I_1和I_2化成较简单的形式，从而给出了它们的几何意义。最后指出：当点O_1，O_2沿方向O_1O_2趋于一点O时，则二直线O_1O_3和O_2O_3重合于Bompiani协变直线$r_0^{(1)}$[1]。

（2）相交于一正常点的一对平面曲线。熊全治[7]采用了跟上述情形相似的方法来研究相交于一个正常点的一对平面曲线，也获得了由二曲线在交点的四阶邻域所决定的两个射影不变式，而且给出了它们的几何意义。

钟同德[1]采用了熊全治的方法来研究下列两种平面曲线对：

1° 两条平面曲线相交于一个变曲点。

2° 两条平面曲线在两个变曲点具有一个公共切线。

对于情形1°，他得到由二曲线在交点的五阶邻域所决定的一个射影不变式，对于情形2°，得到由二曲线的四阶邻域所决定的一个射影不变式；而且利用了Bompiani密切图形l_5、$\bar{l}_5$，O_4，$\bar{O}_4$分别来解释上述两个不变式。

后来，方德植[12,13,14,15,16]讨论了具有高阶奇点的某种特殊平面曲线对。在〔12〕中论述了这样的平面曲线对，它们相交于一个四阶可表示奇点，而且在交点具有不同切线，从而获得了这对曲线的一个射影不变式；又利用了曲线在奇点的密切图形解释了所述的不变式。此外，选择了适当的坐标系，导出适当的标准展开式，而且对于展开式中所有的绝对不变式分别都用某种交比表达出来。同时，还研究了在m阶奇点具有公共切线的平面曲线对，获得了这对曲线的一个射影不变式及其几何意义。在〔13〕中讨论了相交于一个五阶可表示奇点而在交点具有不同切线的曲线对。接着〔14〕研究了更一般情形的曲线对，那就是以相交二曲线的交点作为它们的m阶可表示奇点。继而作进一步的推广〔15〕，研究了下列情形的两对平面曲线：

1° 设一对曲线C与$\overline{C}$相交于一点O，在O点具有不同的切线，而且曲线C以O点为其m阶可表示奇点，曲线$\overline{C}$以O点为其n阶可表示奇点。

2° 设O_1和O_2分别为曲线C和$\overline{C}$的m阶和n阶奇点，而且直线O_1O_2为其公共切线。

此外，在〔16〕中还研究了在不可表示奇点的类似情况。

我们在这里只对情形1°作比较详细的讨论，而对其余的情形仅给出简单的叙述。

由于在解释所得到的射影不变式，以及导出曲线的标准展开式时，有必要用到苏步青所建立的关于具有一个m阶可表示奇点的一条平面曲线的密切图形；关于这些密切图形的坐标和方程在他的著作〔7，9〕中可以找到。

1° 相交于一个(m, n)阶可表示奇点的一对平面曲线。

i）一个射影不变式。设一对平面曲线C和$\overline{C}$交于一点O，曲线C以O为其一个m阶可表示奇点，曲线$\overline{C}$以O为其一个n阶可表示奇点，这种点O以后简称为曲线对C，$\overline{C}$的一个(m, n)阶可表示奇点；而且C，$\overline{C}$在O点具有不同的切线t和$\overline{t}$。在平面上选取一个射影坐标系，使平面上一点的齐次坐标为x_1，x_2，

x_3; 按照下面的定义方程导入非齐次坐标

$$x = \frac{x_2}{x_1}, \qquad y = \frac{x_3}{x_1}, \tag{1.30}$$

取定点O为坐标三角形的一个顶点（1，0，0），切线t和$\bar{t}$分别为三角形的两条边$y=0$和$x=0$，则曲线C和$\bar{C}$在O点的邻域内的展开式可以写为如下的形式：

$$C: \quad y = x^m \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu,$$

$$\bar{C}: \quad x = y^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_\nu y^\nu, \qquad a_0 \bar{a}_0 \neq 0. \tag{1.31}$$

点O与切线t，$\bar{t}$不动的最一般的射影变换可写为

$$x = \frac{B_2 x'}{1 + A_2 x' + A_3 y'},$$

$$y = \frac{C_3 x'}{1 + A_2 x' + A_3 y'}. \tag{1.32}$$

曲线C和$\bar{C}$经过这个变换后分别变为C^*和$\bar{C}^*$，它们的方程也取(1.31)的形式：

$$C^*: \quad y' = x'^m \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^* x'^\nu,$$

$$a_0^* \bar{a}_0^* \neq 0. \tag{1.33}$$

$$\bar{C}^*: \quad x' = y'^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_\nu^* y'^\nu,$$

利用(1.31)，(1.32)和(1.33)，通过实际的计算，就可求出两对曲线(1.31)和(1.33)的系数之间的关系式，其结果是(见方德植〔15〕224页)

$$C_3 a_0^* = B_2^m a_0,$$

$$C_3 [a_1^* + (m-1) A_2 a_0^*] = B_0^{m+1} a_1, \tag{1.34}$$

$$C_3 [a_2^* + m A_2 a_1^* + \binom{m}{2} A_2^2 a_0^*] = B_2^{m+2} a_2,$$

…………………………………………………………

$$C_3[a^*_{m-1}+(2m-3)A_2a^*_{m-2}+\binom{2m-3}{2}A_2^2a_{m-3}+\cdots+\binom{2m-3}{m-1}A_2^{m-1}a^*_0=B_2^{2m-1}a_{m-1}.$$

同理，只要施行下面的代换：

$$\begin{pmatrix} mC_3A_2a_0a_1\cdots a_{m-1}a^*_0a^*_1\cdots a^*_{m-1} \\ nB_2A_3\bar{a}_0\bar{a}_1\cdots\bar{a}_{n-1}\bar{a}^*_0\bar{a}^*_1\cdots a^*_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{1.35}$$

就可以用 $\bar{C}$ 的系数来表达 $\bar{C}^*$ 的系数：

$$B_2\bar{a}^*_0=C_3^n\bar{a}_0,$$

$$B_2[\bar{a}^*_1+(n-1)A_3\bar{a}^*_1]=C_3^{n+1}\bar{a}_1,$$

$$B_2[\bar{a}^*_2+nA_3\bar{a}^*_1+\binom{n}{2}A_3^2\bar{a}^*_1]=C_3^{n+2}\bar{a}_2, \tag{1.36}$$

…………………………………………………………

$$B_2[\bar{a}^*_{n-1}+(2n-3)A_3\bar{a}^*_{n-2}+\binom{2n-3}{2}A_2^2\bar{a}^*_{n-3}+\cdots+\binom{2n-3}{n-1}A_2^{n-1}a^*_0]$$
$$=C_3^{2n-1}a_{n-1}.$$

从（1.34）和（1.36）消去 B_2，C_3，A_2，A_3，就可以得到曲线 C 和关于变换（3）一个射影不变式：

$$I=\frac{[(m-1)^{m-1}a_0^{m-2}a_{m-1}-\binom{2m-3}{m-1}a_1^{m-1}]}{a_0^m\bar{a}_0^n}\cdot\frac{[(n-1)^{n-1}\bar{a}_0^{n-2}\bar{a}_{n-1}-\binom{2n-3}{n-1}\bar{a}_1^{n-1}]}{a_0^m\bar{a}_0^n}. \tag{1.37}$$

（详细的计算见方德植〔15〕225—226页。）

ii）**不变式 I 的一个几何解释**．由于曲线 C 由它的奇点 O 的 $2m-1$ 阶邻域可以确定一条协变直线 l_{2m-1}，它的方程是(1.25)。但是利用 C 的附加条件（1.24）并通过较长的计算，就可以把（1.25）化为

$$m(m-1)^{m-1}a_0^mx+[(m-1)^{m-1}a_0^{m-2}a_{m-1}-\binom{2m-3}{m-1}a_1^{m-1}]y$$
$$=0. \tag{1.38}$$

同样地，对曲线 $\bar{C}$ 也有一条相应的协变直线 $\bar{l}_{2n-1}$，它的方程是

$$n(n-1)^{n-1}\bar{a}_0^ny+[(n-1)^{n-1}\bar{a}_0^{n-2}\bar{a}_{n-1}-\binom{2n-3}{n-1}\bar{a}_1^{n-1}]x$$
$$=0. \tag{1.39}$$

另一方面，曲线 C 与 $\bar{C}$ 在交点 O 的切线 t 与 $\bar{t}$ 的方程分别是 $y=0$

与 $x=0$；因而可以得出 $t,\bar{t},\bar{l}_{2n-1},l_{2m-1}$ 四条直线的交比，并有

$$I=mn(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}(t,\ \bar{t},\ \bar{l}_{2n-1},l_{2m-1})。$$

这就是不变式 I 的一个几何解释。

iii）标准三角形与标准展开式。如果取适当的三角形为坐标三角形（叫做标准三角形）和单位点，从而导出 C，$\bar{C}$ 在 O 的标准展开式。当 $I\neq 0$ 时：

$$C:\quad y=a_0x^m+a_{m-1}x^{2m-1}-\frac{m-1}{m}a_{m-1}x^{2m}+(2m+1),$$

$$a_0\bar{a}_0\neq 0 \qquad (1.39)'$$

$$\bar{C}:\quad x=\bar{a}_0y^n+\bar{a}_{n-1}y^{2n-1}-\frac{n-1}{n}\bar{a}_{n-1}y^{2n}+(2n+1),$$

当 $I=0$，$a_{m-1}=0$，$\bar{a}_{n-1}\neq 0$ 时，则有

$$C:\quad y=a_0x^m+(m-1)a_0^2x^{2m}+(2m+1),$$

$$a_0\bar{a}_0\neq 0 \qquad (1.40)$$

$$\bar{C}:\quad x=\bar{a}_0y^n+\bar{a}_{n-1}y^{2n-1}+(n-1)\bar{a}_0^2y^{2n}+(2n+1),$$

当 $I=0$，$a_{m-1}\neq 0$，$\bar{a}_{n-1}=0$ 时，则有

$$C:\quad y=a_0x^m+a_{m-1}x^{2m-1}+(m-1)a_0^2y^{2m}+(2m+1),$$

$$a_0\bar{a}_0\neq 0 \qquad (1.41)$$

$$\bar{C}:\quad x=\bar{a}_0y^n+(n-1)\bar{a}_0^2y^{2n}+(2n+1),$$

当 $I=0$，$a_{m-1}=0$，$\bar{a}_{n-1}=0$ 时，则有

$$C:\quad y=a_0x^m+(m-1)a_0^2x^{2m}+(2m+1),$$

$$a_0\bar{a}_0\neq 0 \qquad (1.42)$$

$$\bar{C}:\quad x=\bar{a}_0y^n+(n-1)\bar{a}_0^2y^{2n}+(2n+1).$$

上列展开式中的系数 a_0，a_{m-1}，$\bar{a}_0$，$\bar{a}_{n-1}$ 等都可用某种交比来表达，见方德植〔15〕，227—230页。

2° 在（m，n）阶奇点具有公共切线的平面曲线对。设 O_1 和 O_2 分别为曲线 C 和 $\bar{C}$ 的 m 阶和 n 阶的奇点，并以直线 O_1O_2 为公共切线，取 O_1 和 O_2 分别为坐标三角形的顶点（1，0，0）和（0，1，0），则点 O_1 和点 O_2 不动的最一般的射影变换可以写为下列形式：

$$x_1=A_1x_2'+A_2x_3',$$
$$x_2=B_2x_2'+B_3x_3', \qquad (1.43)$$
$$x_3=C_3x_3'.$$

通过实际的计算，可以得到在变换（1.43）之下由曲线C和$\overline{C}$在O_1和O_2两点的（$m+1$）阶和（$n+1$）阶邻域所确定的一个不变式I^*；并且I^*不依赖于曲线C，$\overline{C}$的奇点的阶m，n（m，$n\geqslant 3$）。

此外，I^*还有下述几何意义：

令O_{m+1}和O_{n+1}分别是曲线C和$\overline{C}$的（$m+1$）阶和（$n+1$）阶邻域所确定的协变点，则I^*除了一个常因子$(m-1)(n-1)$外，等于O_1，O_2，O_{m+1}，$\overline{O}_{n+1}$四点的交比。

3° 相交于一个（m，n）阶不可表示奇点的一对平面曲线（见方德植〔16〕）。本段所述的是对（m，n）阶不可表示奇点的一对平面曲线，所介绍的为1°中所介绍的同样问题。但是在这个情形下，所得到的不是一个却是一组射影不变式，并以1°中所得到的不变式I作为它的推论。

同1°中一样，曲线C，$\overline{C}$仍取（1.31）的形式，以及在变换（1.32）的曲线C^*，$\overline{C}^*$的方程也取（1.33）的形式。在1°中已经求出这两对曲线的系数之间的关系式（1.34）和(1.36)。为了得出C和$\overline{C}$的不变式，我们必须从（1.34）和（1.36）消去B_2，C_3，A_2，A_3。为此，先从$(1.34)_1$和$(1.36)_1$解出B_2，C_3：

$$B_2=\left(\frac{\overline{a}_0^*a_0^{*n}}{\overline{a}_0a_0^n}\right)^{\frac{1}{mn-1}},\qquad C_3=\left(\frac{a_0^*\overline{a}_0^{*m}}{a_0\overline{a}_0^m}\right)^{\frac{1}{mn-1}}. \qquad (1.44)$$

从（1.34）和$(1.36)_2$解出A_2，A_3：

$$A_2=\frac{1}{m-1}\left(\frac{a_1}{a_0}B_2-\frac{a_1^*}{a_0^*}\right),\quad A_3=\frac{1}{n-1}\left(\frac{\overline{a}_1}{\overline{a}_0}C_3-\frac{\overline{a}_1^*}{\overline{a}_0^*}\right). \qquad (1.45)$$

把（1.44）代入（1.34）的第$\mu+1$个等式，消去A_2，就可得到一组$m-2$个不变式

$$
\begin{aligned}
I_\mu = \frac{1}{(\bar{a}_0 a_0^n)^{\frac{\mu}{mn-1}}} \Bigg[& \frac{a_\mu}{a_0} - \frac{1}{m-1}\binom{m+\mu-2}{1}\frac{a_{\mu-1}}{a_0}\,\frac{a_1}{a_0} \\
& + \frac{1}{(m-1)^2}\binom{m+\mu-2}{2}\cdot\frac{a_{\mu-2}}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 + \cdots \\
& + \frac{(-1)^k}{(m-1)^k}\binom{m+\mu-2}{k}\left(\frac{a_{\mu-k}}{a_0}\right)\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^k + \cdots \\
& + \frac{(-1)^{\mu-2}}{(m-1)^{\mu-2}}\binom{m+\mu-2}{\mu-2}\frac{a_2}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\mu-2} \\
& + \frac{(-1)^{\mu-1}}{(m-1)^{\mu-1}}\,\frac{\mu-1}{\mu}\binom{m+\mu-2}{\mu-1}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\mu}\Bigg] \qquad (1.46)_1 \\
& (\mu = 2,\ 3,\ \cdots,\ m-1).
\end{aligned}
$$

同样地，把（1.44）与 $(1.45)_2$ 代入（1.36）中第 $\nu+1$ 个等式，消去 A_3，就可以得到另一组 $n-2$ 个不变式：

$$
\begin{aligned}
J_\nu = \frac{1}{(a_0 \bar{a}_0^m)^{\frac{\nu}{mn-1}}} \Bigg[& \frac{\bar{a}_\nu}{\bar{a}_0} - \frac{1}{n-1}\binom{n+\nu-2}{1}\Bigg]\frac{\bar{a}_{\nu-1}}{\bar{a}_0}\,\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0} \\
& + \frac{1}{(n-1)^2}\binom{n+\nu-2}{2}\cdot\frac{\bar{a}_{\nu-2}}{\bar{a}_0}\left(\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0}\right)^2 + \cdots \\
& + \frac{(-1)^k}{(n-1)^k}\binom{n+\nu-2}{k}\left(\frac{\bar{a}_{\nu-k}}{\bar{a}_0}\right)\left(\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0}\right)^k \\
& + \cdots + \frac{(-1)^{\nu-2}}{(n-1)^{\nu-2}}\binom{n+\nu-2}{\nu-2}\frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_0}\left(\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0}\right)^{\nu-2} \\
& + \frac{(-1)^{\nu-1}}{(n-1)^{\nu-1}}\,\frac{\nu-1}{\nu}\binom{n+\nu-2}{\nu-1}\left(\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0}\right)^{\nu} \\
& (\nu = 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1). \qquad (1.46)_2
\end{aligned}
$$

公式（1.46）就是我们所求的两组不变式。但当点 O 为曲线对的一个（m，n）阶**可表示**奇点时，则对于 C 和 $\bar{C}$ 分别满足下列条件：

$$
\frac{a_p}{a_0} = \frac{1}{(m-1)^p}\binom{m+p-2}{p}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^p \qquad (p = 2,\ 3,\ \cdots,\ m-2) \qquad (1.47)_1
$$

和

$$
\frac{\bar{a}_q}{\bar{a}_0} = \frac{1}{(m-1)^q}\binom{n+q-2}{q}\left(\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0}\right)^q \qquad (q = 2,\ 3,\ \cdots,\ n-2). \qquad (1.47)_2
$$

利用 $(1.47)_1$和 $(1.47)_2$分别代入 $(1.46)_1$和 $(1.46)_2$，并经过简化后，可以得到

$$I_p=0,\ I_q=0 \qquad (p=2,\ 3,\ \cdots,\ m-2;\ q=2,\ 3,\ \cdots,\ n-2),$$

$$I_{m-1}=\frac{(m-1)^{m-1}a_0^{m-2}a_{m-1}-\binom{2m-3}{m-1}a_1^{m-1}}{(m-1)^{m-1}a_0^{m-1}(\bar{a}_0\bar{a}_0^m)^{\frac{n-1}{mn-1}}},$$

$$(1.48)$$

$$J_{n-1}=\frac{(n-1)^{n-1}\bar{a}_0^{n-2}\bar{a}_{n-1}-\binom{2n-3}{n-1}\bar{a}_1^{n-1}}{(n-1)^{n-1}\bar{a}_0^{n-1}(a_0\bar{a}_0^m)^{\frac{n-1}{nm-1}}}.$$

把这两个式子乘起来就有：

$$J=I_{m-1}J_{n-1}=\frac{\left[(m-1)^{m-1}a_0^{m-2}a_{m-1}-\binom{2m-3}{m-1}a_1^{m-1}\right]\left[(n-1)^{n-1}\bar{a}_0^{n-2}\bar{a}_{n-1}-\binom{2n-3}{n-1}\bar{a}_1^{m-1}\right]}{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}a_0^m\bar{a}_0^n}.$$

与1°中所得到的不变式 I 比较，立刻看出，除了一个常数因子 $(m-1)^{1-m}(n-1)^{1-n}$外，J 就是 1° 中的 I。这就是说，不变式 I 是可以作为不可表示奇点的情况下的一个特殊情形而得到的。

至于标准三角和标准展开式，并可求出它们的头一个系数的几何意义，为了节省篇幅，略而不述。

§4.2. 空间曲线的射影微分几何

本节研究三维射影空间 P^3里空间曲线在 P^3 中的射影变换群之下的不变性质，P^3里的射影变换可写为如下的形式：

$$\begin{aligned}
x_1^*&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4,\\
x_2^*&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4,\\
x_3^*&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4,\\
x_4^*&=a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4,
\end{aligned}\qquad A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}\neq 0.$$

或即

$$x^{*}=xA.$$

由此可见，P^3里的射影群具有 15 个本质参数，记作G_{15}。

与平面 P^2 上的情形一样，设 x，y，z，t 为空间 P^3 中任意四个不共面的点；则 P^3 中任意一点 r 的射影齐次坐标可表为如下的形式：

$$r=\xi_0 x+\xi_1 y+\xi_2 z+\xi_3 t.$$

1．三维空间曲线的射影理论　关于三维空间曲线的射影微分几何，由 Halphen[2]开始研究，到了 Wilczynski[1]才有了系统的讨论。因其方法很繁，因此 Sannia[2]以新的方法研究射影曲线论，不过所采用的法四面体的作图及射影不变式的几何意义仍不简单。后来方德植[5]利用自己所创造的一个主射影二次曲面，那就是由曲线上一点的射影主法线及其二邻近射影主法线所决定的二次曲面来改进，并简化了 Sannia 的结果。

可是苏步青[5]创造性地运用了平面曲线在其一变曲点的 Bompiani 的密切图形来重新建立空间曲线论，讨论的过程始终使用几何方法；因此，对于曲线的法四面体的作图及射影不变式等获得简单的几何解释。不久，方德植[6]以较简单的交比来解释了曲线的曲率形式及两个射影曲率。

现在分为两段扼要地来分别介绍上面所述的两个方法和几何解释。

（1）Sannia 的方法、方德植的一些改进．设$P(x)$，$P_t(t)$，$P_n(t)$，$P_b(b)$是 Sannia 的基本四面体的顶点，使得 PP_n 和 PP_b 分别是曲线的射影主法线和射影副法线，又平面$[PP_tP_b]$和$[PP_nP_b]$分别是射影从切面和法面；Sannia[2]所建立的射影的 Frenet 公式取如下的形式：

$$\begin{cases} x'=t, \\ t'=n-5Ix, \qquad\qquad (xtnb)=1, \\ n'=(5I'-2\theta_3)x+b, \\ b'=(25I^2-K)x-(5I'+2\theta_3)t-5In. \end{cases} \tag{2.1}$$

式中$K=J+3I''+9I^2$; $\theta_3=0$或1，按照曲线的切线属于一个线丛与否而定；撇号"$'$"表示关于射影弧σ的导数；I和J分别表示Sannia的第一和第二射影曲率。

从（2.1）就可得到法坐标x所满足的法方程：

$$\frac{d^4x}{d\sigma^4}=(50I^2-K)\,x-2\,(5I'+2\theta_3)\,t-10In. \tag{2.2}$$

依照一般的方法，例如求Lie的二次曲面的方法（见§3.3.6），不难求出射影主二次曲面Q的方程(见方德植〔5〕，98—99页）是

$$y_2y_3-y_1y_4+5I'\,y_4^2=0, \tag{2.3}$$

式中y_1, y_2, y_3, y_4是空间中任意点关于基本四面体$F\{PP_tP_nP_b\}$的局部坐标。

从方程（2.2）容易看出，密切平面$y_4=0$，射影法面$y_2=0$和射影从切面$y_3=0$分别在点$P(1,\ 0,\ 0,\ 0)$，$P_n(0,\ 0,\ 1,\ 0)$和$P_t(0,\ 1,\ 0,\ 0)$切于二次曲面Q。因此得到

定理4.10 棱P_nP_t和PP_b是关于射影主二次曲面的一对共轭直线。

令$(Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ Z_4)$表示任意点$M(Z)$关于曲线C在P的密切四面体O的局部坐标，则有

$$Z_1=y_1+2Iy_3+\left(\frac{2}{5}\theta_3-3I'\right)y_4,$$

$$Z_2=y_2-2Iy_4,$$

$$Z_3=2y_3,$$

$$Z_4=2y_4.$$

因而二次曲面Q关于O的方程可化为

$$2IZ_3Z_4+3Z_2Z_3-Z_1Z_4+\frac{1}{3}\left(I'+\frac{1}{5}Q_3\right)Z_4^2=0. \tag{2.4}$$

另一方面，曲线C在P点的密切三次曲线C_3的参数方程为

$$Z_1=m^3,\ Z_2=m^2,\ Z_3=m,\ Z_4=1,$$

代入（2.4），就有

$$2m^3+2Im+\frac{1}{3}\left(I'+\frac{1}{5}\theta_3\right)=0.$$

设m_1，m_2，m_3是这个方程的三个根，则$M_1(m_1)$，$M_2(m_2)$，$M_3(m_3)$ 与P一样都是C_3与Q的交点。由于

$$m_1+m_2+m_3=0,\ m_1m_2+m_2m_3+m_3m_4=I,$$

$$m_1m_2m_3=-\left(\frac{I'}{6}+\frac{\theta_3}{30}\right), \tag{2.5}$$

我们把通过M_1，M_2，M_3的平面π的方程表示为

$$Z_1+IZ_3+\left(\frac{I'}{6}+\frac{\theta_3}{30}\right)Z_4=0,$$

或即

$$y_1+4Iy_4+\left(\frac{3}{5}\theta_3-2I'\right)y_4=0. \tag{2.6}$$

所以平面π与PP_t和PP_n分别交于P_t和$P_\pi(-4I,\ 0,\ 1,\ 0)$。此外，直线PP_n与曲线的密切二次曲线交于点$P'_n(-2I,\ 0,\ 1,\ 0)$，所以

$$(PP'_n,\ P_\pi P_n)=-1.$$

这样完全地决定了基本四面体F的顶点P_n。

其次，我们还要决定第四个顶点P_b。

从（2.5）我们看出，C_3在M_1，M_2，M_3的三个密切平面交于射影从切面上一点G。

直线PP_b与二次曲面Q交于一点P和

$$M(5I',\ 0,\ 0,\ 1).$$

从（2.1），我们有P_n的轨迹的切线与直线PP_b交于点

$$N(5I'-2\theta_3,\ 0,\ 0,\ 1),$$

和平面（2.6）与直线PP_b交于点

$$H\left(2I'-\frac{3\theta_3}{5},\ 0,\ 0,\ 1\right).$$

由此可见，四点P，M，H，N与四点P，M_1，P_b，N的交比分别是

$$D\equiv(PM,\ HN)=\frac{2\theta_3}{3I'+\frac{3\theta_3}{5}};$$

和

$$D_1\equiv(PM,\ P_bN)=\frac{2\theta_3}{5I'}. \qquad (2.7)$$

由这个等式我们可以决定顶点P_b，使得

$$3(PM,\ HN)\{2+(PM,\ P_bN)\}=10(PM,\ P_bN).$$

从此，基本四面体F已经完全由几何的方法决定了。

现在要把射影曲率I和J以某种交比来表达。

为此，我们观察平面（2.6）与直线P_nP_b交于点$A\left(0,\ 0,\ 1,\ -\frac{20I}{3\theta_3-10I'}\right)$，所以，通过$A$和切线$PP_t$的平面$\pi_A$的方程是

$$y_3+\frac{3\theta_3-10I'}{20I}y_4=0.$$

另一方面，曲线C和C_3在P点的主平面π_3是

$$y_3-\frac{5I}{4\theta_3}y_4=0.$$

于是有交比

$$D_2\equiv(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4)=\frac{25IJ}{10I'\theta_3-3\theta_3^2}, \qquad (2.8)$$

这里π_1表示射影从切面。

我们还有必要寻找I和J之间的另一简单关系。

众所周知，C在一点的任何七点二次曲面总要通过一个第八固定点S，通称为Sannia点。S关于密切四面体O的局部坐标是

$$S\left(m^3-\frac{1}{l^3},\ m^2,\ m,\ 1\right),$$

式中

$$l^3=\frac{15}{\theta_3},\quad m=\frac{5J}{12\theta_3}.$$

由变换（2.3）可以得出S关于F的坐标是

$$S(y_1,\ 6m^2+2I,\ 3m,\ 1).$$

所以平面$\pi_s\equiv[S,\ PP_n]$的方程是

$$y_2-(6m^2+2I)y_4=0.$$

这个平面在点

$$S'\left(\frac{25J^2}{24\theta_3^2}+2I,\ 0,\ 1,\ 0\right)$$

切于二次曲面Q。

从此得出交比

$$D_3\equiv(P_nP,\ S'P'_n)=-1-\frac{25J^2}{48\theta_3^2I},$$

或即

$$D_3+1=-\frac{25J^2}{48\theta_3^2I}. \tag{2.9}$$

由于（2.7），（2.8）和（2.9），我们最后得到I和J以这些交比表达：

$$I^3=-\frac{\theta_3^2D_2^2(4-3D_1)}{1200D_4^2(D_3+1)},$$

$$(\theta_3=1)$$

$$J^3=\frac{48\theta_3^4D_2(3D_1-4)(D_3+1)}{625D_1}.$$

现在让我们来解释曲线C的曲率形式$Id\sigma^2$。

为此，我们取$P(x(\sigma))$的邻点$T(x(\sigma+d\sigma))$，则C在T的切线上任意点的坐标是

$$\rho x(\sigma+d\sigma)+x'(\sigma+d\sigma)\qquad(\rho\text{是一个参数}).$$

按照泰勒展开式和公式（2.1），这些坐标取形式

$$y_1x+y_2t+y_3n+y_4b,$$

式中

$$y_1=\rho\left\{1-\frac{5}{2}Id\sigma^2+(3)\right\}+\{-5Id\sigma+(2)\},$$

$$y_2=\rho\left\{d\sigma-\frac{5}{6}Id\sigma^3+(4)\right\}+\left\{1-\frac{5}{2}Id\sigma^2+(3)\right\},$$

$$y_3=\rho d\sigma^3\left\{\frac{1}{2}-\frac{5}{12}Id\sigma^2+(3)\right\}\qquad(2.10)$$

$$+d\sigma\left\{1-\frac{5}{3}Id\sigma^2+(3)\right\},$$

$$y_4=\rho\left\{\frac{1}{6}d\sigma^3-\frac{1}{12}Id\sigma^5+(6)\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}d\sigma^2-\frac{5}{11}Id\sigma^4+(5)\right\}.$$

空间中任意直线 l 与 四 面 体F的 面 〔$P_tP_nP_b$〕, 〔PP_nP_b〕, 〔PP_tP_b〕 和 〔PP_tP_n〕 分别交于点 P_1, P_2, P_3和 P_4, 则由 Von Staudt 定理: 交比 (P_1P_2, P_3P_4) 等于平面 〔lP〕, 〔lP_t〕,〔lP_n〕 和 〔lP_n〕 的交比, 并称之为直线 l 关于四面 体F的 Von Staudt 交比。

由此, C在T的切线关于F的 Von Staudt 交比决定于

$$\Delta\equiv(\rho_1\rho_2,\ \rho_3\rho_4),$$

其中 ρ_i($i=1$, 2, 3, 4) 决定于方程

$$y_i=0\qquad(i=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

即

$$\rho_1=SId\sigma^2+(2),$$

$$\rho_2=-\frac{1}{d\sigma}\left(1-\frac{5}{3}Id\sigma^2\right)+(2),$$

$$\rho_3=-\frac{2}{d\sigma}\left(1-\frac{5}{6}Id\sigma^2\right)+(2),$$

$$\rho_4=-\frac{1}{d\sigma}(3-Id\sigma^2)+(2).$$

于是我们得到

$$\Delta\equiv\frac{\rho_1-\rho_3}{\rho_2-\rho_3}\cdot\frac{\rho_2-\rho_4}{\rho_1-\rho_4}$$

$$=\frac{4}{3}\left\{1+\frac{2}{3}Id\sigma^2+(3)\right\},$$

或即

$$\frac{9}{8}\Delta-\frac{3}{2}=Id\sigma^2+(3).$$

因此得到

定理4.11 设Δ为在C上P的邻点T的切线关于基本四面体F的 Von staudt 交比，则无穷小$\frac{9}{3}\Delta-\frac{3}{2}$的主要部分是曲率形式

$$Id\sigma^2.$$

（2）苏步青的方法、方德植对曲率形式及两个射影曲率的解释．苏步青创造性地运用平面曲线在其一变曲点的Bompiani的密切图形来重新建立空间曲线论．讨论的过程始终使用几何方法；因此，对于曲线的法四面体的作图及射影不变式等获得了简单的几何解释．这里只作提要式的介绍，至于详细的论述和证明见苏步青〔5〕或〔I〕．

他所采用的主要途径是这样的：首先作出曲线C在一正常点P的一个附属四面体，使与C在P的切线上一点互相对应．因为通过C的切线的任一平面π与C的切线面的交线以P为变曲点；因此，在切线上有相应的Bompiani密切图形O_4，取O_4为四面体的一个顶点P_1，从P_1引C的密切二次曲线的切线，取其切点为另一个顶点P_2，最后取Bompiani密切图形O_6为第四个顶点P_3，于是四面体$\{P, P_1, P_2, P_3\}$是由切线上点P_1的位置完全决定的；因为对于P_1有一平面π与之对应，使以P_1作为π和C的切线面的截线所对应的点O_4．

参考于基本四面体$\{P, P_1, P_2, P_3\}$，我们可以把曲线C在正常点P的展开化为如下的形式：

$$\left.\begin{aligned}\eta&=a_2\xi^2+a_5\xi^5+a_6\xi^6+(7),\\ \zeta&=b_3\xi^3+b_6\xi^6+b_7\xi^7+(8),\end{aligned}\right\}\quad (a_2b_3\neq 0) \qquad (2.11)$$

式中系数有关系式：

$$9b_3a_5-4a_2b_6=0. \qquad (2.12)$$

由于四面体$\{P, P_1, P_2, P_3\}$是由P_1完全决定的，因而记作$T(P_1)$．

假设曲线C的一动点P的坐标x都是一个参数u的函数：$x=x(u)$，取它的导点$x'=\frac{dx}{du}$为$P_1(x_1)$，则得到对应的四面体$T(P_1)$，称为基本四面体。我们容易看到导点x_1的位置，于是$T(P_1)$的决定与参数的变更：$\bar{u}=f(u)$无关，而对比例因子的变换：$\bar{x}=\lambda x$变为

$$\bar{x}_1=\frac{d\bar{x}}{du}=\lambda(x_1+\beta x)\quad\left(\beta=\frac{\lambda'}{\lambda}\right).$$

因而$T(P_1)$也受到了变更。若在这个变换下，使曲线C的展开保留（2.11）的形式，经过计算后，就可以获得曲线的两个微小不变式$\sqrt[3]{\theta_3}du$和$\sqrt[4]{\theta_4}du$。这两个不变式既然在参数u和比例因子λ的变换下是不变的，所以是内在的。

其次，根据内在而且不变的方法，从无穷多个基本四面体$T(P_1)$中决定一个，就是所谓法四面体。所对应的x称为曲线C上点P的法坐标。若C的切线不属于同一线性丛，则可导出坐标x所满足的微分方程，它取如下的形式：

$$\Delta^4x-10k\Delta^2x+2(2\theta_3-5\Delta k)\Delta x+(\theta_4-3\Delta^2k+9k^2)x=0,\tag{2.13}$$

式中Δ表示关于形式$d\sigma=\sqrt[3]{\theta_3}du$的协变导数的算子。

由于方程（2.13）决定于三个形式

$$kdu^2,\quad \theta_3du^3,\quad \theta_4du^4,$$

它们都是不变式，分别称为曲线的曲率形式以及第一类和第二类射影弧素。从而建立起曲线的基本定理：

已知三个形式kdu^2，θ_3du^3，θ_4du^4（其中k，θ_3，θ_4都是曲线的参数u的已知函数）时，除了一个直射变换外，总可以决定一条空间曲线C，使这三个形式分别是C的曲率形式和第一类、第二类射影弧素。曲线C的一般点P的法坐标是法方程(2.13)的四个线性无关解。

接着取第一类射影弧素σ作为参数而导出对于切线不属于同一线性丛的一条曲线C的射影的Frenet公式：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{d\sigma}&=x_1,\\
\frac{dx_1}{d\sigma}&=-3Ix+x_2,\\
\frac{dx_2}{d\sigma}&=-\frac{16}{5}\theta_3x-4Ix_1+x_3,\\
\frac{dx_3}{d\sigma}&=-Jx-\frac{4}{5}\theta_3x_1-3Ix_2.
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{I})$$

但$\theta_3=1$，$I=-k$，$J=\theta_4$是Sannia的射影曲率.

从此就可得到法坐标x所满足的法式方程：

$$\frac{d^4x}{d\sigma^4}+10I\frac{d^2x}{d\sigma^2}+2\left(5\frac{dI}{d\sigma}+2\theta_3\right)\frac{dx}{d\sigma}$$
$$+\left(J+3\frac{d^2I}{d\sigma^2}+9I^2\right)x=0.\qquad(\mathrm{II})$$

这就是具有Sannia形式的微分方程（与（2.2）比较）.

现在介绍作者对空间曲线的曲率形式及两个射影曲率的简单的几何解释. 苏步青在上面引证的论文里已经解释了两个射影曲率，不过所得到的表达式较繁. 这里介绍方德植[6]所获得的有关射影曲率和曲率形式的几何意义. 其结果如下：

1° 设P'为曲线C上P的邻点使它在P的密切平面上，但不在切线上. 若直线PP'与P_1P_2及曲线（P_1）在P_1的切线t_1分别交于Q及Q'，又令Δ表示P，P'，Q'，Q四点的交比，则曲率形式等于$\frac{2}{3}(1-\Delta)$的主要部分.

2° 设$\overline{S}$表示C的切线PP_1与平面$[P_2, P_3, S]$的交点，这里S是Sannia点（就是C在P的一切七点二次曲面的第八公共点），D表示P，P_1，$\overline{R}$，$\overline{S}$的交比（$\overline{R}$为Sannia主点），则

$$J^3=\frac{3^2\cdot 2^6}{5^3(1+3D)}.$$

3° 设$Q_\varepsilon(\varepsilon=\pm1)$表示曲线（$P_1$）在$P_1$的切线与$C$在$P$点的密切二次曲线$C_2$的交点，$P_3^*$表示曲线（$P_3$）在$P_3$的切线与密切平面的交点，则射影曲率$I$的三次幂除了一个常因子

$-\frac{2}{3^2\cdot5^2}$外等于PP_1，PP_2，$PP_3{}^*$，PQ_t四条直线的交比的平方。

后来，熊全治[6]又得到曲率形式及射影曲率的其他解释。

现在对上述三个定理给以简单的证明：

1° 曲线C上P的邻点$P'(x(\sigma+d\sigma))$可以看作密切平面上的一点，如果把阶≥3的无穷小略而不计。这样，

$$x(\sigma+d\sigma)=\left(1-\frac{3}{2}Id\sigma^2\right)x+d\sigma t+\frac{d\sigma^2}{2}n,$$

因而P'的局部坐标是

$$y_1=1-\frac{3}{2}Id\sigma^2,\quad y_2=d\sigma,\quad y_3=\frac{d\sigma^2}{2},\quad y_4=0.$$

直线PP'上任意点的坐标是

$$y_1=1-\frac{3}{2}Id\sigma^2-\rho,\quad y_2=d\sigma,\quad y_3=\frac{d\sigma^2}{2},\quad y_4=0.$$

ρ是一个参数。故Q，Q'的对应参数分别是$1-\frac{3}{2}Id\sigma^2$和1。所以交比

$$\Delta\equiv(PP',\ QQ')=1-\frac{3}{2}Id\sigma^2,$$

或即

$$\frac{2}{3}(1-\Delta)=Id\sigma^2.$$

2° 我们容易求得Sannia点S关于法四面体$\{P,\ P_t,\ P_m,\ P_b\}$的局部坐标是

$$y_1=1-9x_0^3,\quad y_2=3x_0,\quad y_3=\frac{9}{2}x_0^2,\quad y_4=\frac{9}{2}x_0^3,$$

式中

$$x_0=\frac{4}{5J}.$$

从此，平面$[P_2P_3S]$与切线PP_1的交点$\bar{S}$的坐标是

$$y_1=1-9x_0^3,\quad y_2=3x_0,\quad y_3=0,\quad y_4=0.$$

Sannia 主点 $\overline{R}$ 是

$$y_1 = 5J,\quad y_2 = -4,\quad y_3 = 0,\quad y_4 = 0.$$

由此求出交比

$$D \equiv (PP_1,\ \overline{R}\overline{S}) = -\frac{1}{3} + \frac{3\cdot 2^8}{5^3 J^3},$$

或即

$$J^3 = \frac{3^2\cdot 2^8}{5^3(1+3D)}.$$

3° 由于曲线 C 在 P 点的密切二次曲线 C_2 的方程是由

$$y_2^2 - \frac{8}{3}y_1y_3 = 0$$

给出，又从（2.11）我们得到曲线（P_1）在 P_1 的切线 t_1：

$$y_1 + 3Iy_3 = 0.$$

点 Q_ε 的坐标是

$$y_1 = -3I,\quad y_2 = \varepsilon\sqrt{-8}\,I,\quad y_3 = 1,\quad y_4 = 0\ (\varepsilon = \pm 1).$$

另一方面，曲线（P_3）在 P_3 的切线与曲线的密切平面交于点 P^*，它具有坐标

$$y_1 = J,\quad y_2 = \frac{4}{5},\quad y_3 = 3I,\quad y_4 = 0.$$

所以四条直线 PP_1，PP_2，PP_3^*，PQ_ε 的交比

$$P(P_1P_2,\ P_3^*Q) = \frac{15}{5}\varepsilon I\sqrt{-8I},$$

或即

$$I^3 = -\frac{2}{3^2 5^2}[P(P_1P_2,\ P_3^*Q_\varepsilon)]^2.$$

（3）B-曲线　苏步青[14]把 Bertrand 曲线推广到射影空间中去，就是这样的曲线 C，它的射影主法线为另一曲线 $\overline{C}$ 的射影主法线，C 称为 B-曲线．他获得了 B-曲线的特征方程，同时得到下列结果：

1° 设在对应点的射影弧为 σ，$\bar{\sigma}$，则

$$|\sigma|^{3/2} + |\bar{\sigma}|^{3/2} = \text{const}.$$

2° 设B，$\overline{B}$为一对共轭B-曲线，设在对应点$\frac{d\sigma}{d\bar{\sigma}}$=常数。这时的$B$曲线称为$B_1$曲线，则有

i）$\sigma+\bar{\sigma}$=常数。

ii）B_1，$\overline{B}_1$在对应点的第一及第二射影曲率之值相等。

iii）空间中一定存在一个零系（null system）使B_1的一点P与B_1在对应点的密切平面成对应元素。

2. 两条空间曲线的接触不变式 Halphen[2]早已证明了这样的事实：假设两条空间曲线C和$\overline{C}$在一正常点O具有k（$k>0$）阶接触，则有一个包含C，$\overline{C}$在O的公共切线t的平面ω，使得从这个平面上任意点P（不在t上）把这两曲线射影到不过P的任一平面上所得到的两条射影曲线至少构成$k+1$阶接触。称ω为C和$\overline{C}$在O点的主平面。

证 假定曲线C和$\overline{C}$的方程是

$$C:\begin{cases} y=a_2x^2+\cdots+a_kx^k+a_{k+1}x^{k+1}+\cdots, \\ z=b_2x^2+\cdots+b_kx^k+b_{k+1}x^{k+1}+\cdots, \end{cases}$$

$$\overline{C}:\begin{cases} y=a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\bar{a}_{k+1}x^{k+1}+\cdots, \\ z=b_2x^2+\cdots+b_kx^k+\bar{b}_{k+1}x^{k+1}+\cdots, \end{cases} \quad (k>0)$$

且$\bar{a}_{k+1}\neq a_{k+1}$或$\bar{b}_{k+1}\neq b_{k+1}$。这两条曲线在点$O(0,\ 0,\ 0)$构成$k$阶接触，它们在$O$的公共切线$t$的方程是$y=0$，$z=0$。我们施行如下的坐标变换：

$$\bar{x}=x,\ \bar{y}=(b_{k+1}-\bar{b}_{k+1})y-(a_{k+1}-\bar{a}_{k+1})z,\ \bar{z}=z,$$

这样引入的平面$\bar{y}=0$关于原坐标系的方程是

$$(b_{k+1}-\bar{b}_{k+1})y-(a_{k+1}-\bar{a}_{k+1})z=0. \tag{2.14}$$

在这个变换下，O点的坐标（0，0，0）和切线t的方程$y=0$，$z=0$是不变的；曲线C的第二个方程保留同样的形式，而第一个变为

$$\bar{y}=[(b_{k+1}-\bar{b}_{k+1})a_2-(a_{k+1}-\bar{a}_{k+1})b_2]\bar{x}^2+\cdots$$
$$+(b_{k+1}\bar{a}_{k+1}-a_{k+1}\bar{b}_{k+1})\bar{x}^{k+1}+\cdots;$$

而对曲线$\overline{C}$的第二个方程保留同样的形式，第一个方程到$\bar{x}^{k+1}$一

项为止，与这个方程相同。所以从新点（0，0， 0， 1）把C，$\overline{C}$ 射影到平面 $\bar{y}=0$ 上所得到的射影锥面沿着通过这点与O的母线至少构成$k+1$阶接触。因为新点（0， 0， 0， 1）是在平面 $\bar{y}=0$，不在 t 上的任意一点，所以若射影中心P是在平面 $\bar{y}=0$ 上，但不在 t 上的其他任意点，则射影锥面仍然至少构成 $k+1$ 阶接触，而且这两个锥面与不通过P的任意平面的截线也至少构成 $k+1$ 阶接触。所以平面 $\bar{y}=0$ 是曲线C，$\overline{C}$ 在O点的主平面，而方程（2.14）表示这个平面关于原坐标系的方程。

Bompiani[5]发现．当曲线C和$\overline{C}$ 在O点的主平面(2.11)不重合于它们的公共密切平面时（$k>1$），在主平面上有一条通过O的直线，使得若从这条直线上任意一点P($P\neq O$）射影C，$\overline{C}$ 到不通过P的任一平面上，则射影曲线至少构成$k+2$阶接触，称这条直线为曲线C，$\overline{C}$ 在O的**主直线**，而且在主直线上有一点，使得若取这点为射影中心，射影曲线至少构成$k+3$阶接触。称这个点为**主点**。此外，Palozzi[4]与Stouffer[1]也分别得到这些结果，但这里不叙述它们的证明。

现在再叙述两个结果如下：

1° 若两条空间曲线在一点O相切，则包含这两曲线并以O为正常点的每个曲面的切面为两曲线在O点的主平面。（见 Fubini-Čech〔Ⅱ〕，32 页。）

2° 设在一点O有相同切线的两条空间曲线从一点P射影到一个平面π上，并在O点计算所得到的两条平面曲线的接触不变式。这个不变式既不依赖于点P，又不依赖于平面π的一个充要条件是已知两条空间曲线在O点有公共密切平面。这时射影曲线的接触不变式可以称为**已知两条空间曲线的接触不变式**。（见 Fubini-Čech〔Ⅱ〕，32 页。）

3．具有不同切线的两条相交空间曲线的不变式 若两条空间曲线C和$\overline{C}$交于一点O，并在O有不同的切线t和$\bar{t}$，从几何的性质显然可知：若从不在平面〔t，$\bar{t}$〕上任意一点P射影C和$\overline{C}$，则射影锥面仅仅是沿公共母线OP相交。此外，Halphen[2]

指出：若从平面$[t, \bar{t}]$上一点$P(P \neq O)$射影曲线C和$\bar{C}$，则射影锥面沿直线OP相切，所以这两个锥面与不通过P的任一平面的两条截线在O的对应点处有一公共切线。Bompiani[6]证明了，一般来讲，若P取在平面$[t, \bar{t}]$的某些直线上，射影锥面至少构成二阶接触，这种直线称为主直线。他还证明了，一般地，若P落在这种主直线上确定的位置，使接触的阶至少是三，称这种点P为主点。下面就要讨论这种主直线和主点。

这里有两个不同的情形，就是按照平面$[t, \bar{t}]$是否与$C, \bar{C}$的密切平面重合。先来考虑这样的情形：C和$\bar{C}$在O点有不同的切线t，$\bar{t}$和不同的密切平面，而且t和$\bar{t}$都不与两密切平面的交线l重合。我们假定O为C，$\bar{C}$上一个正常点，并选取这样的坐标系，使得t：$y=0$，$z=0$；$\bar{t}$：$x=0$，$z=0$；$\bar{t}$：$x=0$，$y=0$，则C，$\bar{C}$在O的邻域中的展开式分别可写成如下的形式：

$$C\begin{cases} y=rx^3+\cdots, \\ z=ax^2+bx^3+\cdots, \end{cases} \qquad \bar{C}\begin{cases} x=\rho y^3+\cdots, \\ z=\alpha y^2+\beta y^3+\cdots. \end{cases}$$

从平面$[t, \bar{t}]$上而不在t，$\bar{t}$上的一点$P(x_0, y_0, 0)$把曲线C，$\bar{C}$射影到平面$y=0$上，以C'，$\bar{C}'$分别表示射影曲线，则C'的参数方程是

$$C':\begin{cases} X=x-r\dfrac{x_0}{y_0}x^3+\cdots, \\ Y=0, \\ Z=ax^2+bx^3+\cdots. \end{cases}$$

所以C'也可表示为：

$$C':\ Y=0,\ Z=ax^2+bx^3+\cdots.$$

类似地，$\bar{C}'$的参数方程是

$$\bar{C}':\begin{cases} X=-\dfrac{x_0}{y_0}y-\dfrac{x_0}{y_0^2}y^2+\left(\rho-\dfrac{x_0}{y_0^3}\right)y^3+\cdots, \\ Y=0, \\ Z=\alpha y^2+\left(-\dfrac{\alpha}{y_0}+\beta\right)y^3+\cdots. \end{cases}$$

所以 $\overline{C}'$ 也可表示为

$$\overline{C}': Y=0, \quad Z=\alpha\frac{y_0^2}{x_0^2}X^2+(\alpha-\beta y_0)\frac{y_0^2}{x_0^3}X^3+\cdots.$$

曲线 C'，$\overline{C}'$ 在 O 一般构成1阶接触，Segre 接触不变式是

$$\frac{\alpha}{a}\ \frac{y_0^2}{x_0^2}.$$

这只与中心 P 所在的直线有关的量。由此可见，只限于 P 在下列直线之一上时：

$$ax^2-\alpha y^2=0, \quad z=0,$$

两条射影曲线 C'，$\overline{C}'$ 具有2阶接触。

这两条直线称为曲线 C，$\overline{C}$ 在 O 点的**主直线**；它们在平面 $[t, \bar{t}]$ 上并调和分割两切线 t，$\bar{t}$。

射影曲线 C'，$\overline{C}'$ 要至少构成3阶接触的充要条件是射影中心 $P(x_0, y_0, 0)$ 又在直线

$$z=0, \quad b\alpha x+a\beta y=a\alpha$$

上，称它为**主连线**，并称这条直线与两条主直线的交点为曲线 C，$\overline{C}$ 在 O 的**主点**。容易求出这些主点的坐标是

$$\frac{\alpha l^2}{b\pm\beta l^3}, \quad \frac{\pm\alpha l^2}{b\pm\beta l^3}, \quad 0 \quad \left(l^2=\frac{a}{\alpha}\right).$$

熊全治[8]还给出主直线与主点的别种定义。

其次，来考虑另一个情形：两曲线 C，$\overline{C}$ 在交点 O 有不同的切线 t，$\bar{t}$，但有同一密切平面 $[t, \bar{t}]$。我们假定 O 为 C，$\overline{C}$ 上一个正常点，并选取这样的坐标系，使得 t：$y=0$，$z=0$；$\bar{t}$：$x=0$，$z=0$，则 C，$\overline{C}$ 在 O 的邻域中的展开式分别可以写成如下的形式：

$$C: \begin{cases} y=ax^2+bx^3+cx^4+\cdots, \\ z=rx^3+sx^4+\cdots, \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\overline{C}: \begin{cases} x=\alpha y^2+\beta y^3+\gamma y^4+\cdots, \\ z=\rho y^3+\sigma y^4+\cdots. \end{cases} \tag{2.16}$$

若从不在 t，$\bar{t}$ 上一点 $P(x_0, y_0, 0)$ 把 C 射影到平面 $y=0$

上，则射影曲线 C' 的参数方程是

$$C':\begin{cases} X = x - \dfrac{x_0}{y_0}ax^2 + \dfrac{1}{y_0}(a - x_0 b)x^3 \\ \qquad + \dfrac{1}{y_0}\left(b - cx_0 - \dfrac{x_0}{y_0}a^2\right)x^4 + \cdots, \\ Y = 0, \\ Z = rx^3 + sx^4 + \cdots, \end{cases}$$

所以 C' 也可表示为

$$C':\ Y = 0,\quad Z = rX^3 + \left(3\,\frac{x_0}{y_0}ar + s\right)X^4 + \cdots.$$

类似地，$\overline{C}'$ 的参数方程是

$$\overline{C}':\begin{cases} X = -\dfrac{x_0}{y_0}y + \left(\alpha - \dfrac{x_0}{y_0^2}\right)y^2 + \left(\beta + \dfrac{\alpha}{y_0} - \dfrac{x_0}{y_0^2}\right)y^3 \\ \qquad + \left(\gamma - \dfrac{\beta}{y_0} + \dfrac{\alpha}{y_0^2} - \dfrac{x_0}{y_0^4}\right)y^4 + \cdots, \\ Y = 0, \\ Z = \rho y^3 + \left(\sigma + \dfrac{\rho}{y_0}\right)y^4 + \cdots, \end{cases}$$

所以 $\overline{C}'$ 也可表示为

$$\overline{C}':\ Y = 0,$$

$$Z = -\rho\frac{y_0^3}{x_0^3}X^3 + \left[3\,\rho\left(\alpha - \frac{x_0}{y_0^2}\right)\frac{y_0}{x_0} + \sigma + \frac{\rho}{y_0}\right]\frac{y_0^4}{x_0^4}X^4 + \cdots.$$

曲线 C'，$\overline{C}'$ 在 O 一般构成 2 阶接触，Segre 接触不变式是

$$-\frac{\rho}{r}\ \frac{y_0^3}{x_0^3}.$$

当这个量等于 1 时，即当 P 在直线

$$z = 0,\quad rx^3 + \rho y^3 = 0 \tag{2.17}$$

上时，C'，$\overline{C}'$ 至少构成 3 阶接触。称这三条直线（2.17）为 C，$\overline{C}$ 在 O 点的**主直线**，它们与 t，$\overline{t}$ 是**反配极的**。

若 C'，$\overline{C}'$ 至少构成 4 阶接触，则 P 的两个坐标 x_0，y_0 必须

满足（2.17）与

$$3\,ar\frac{x_0}{y_0}+s=\left\{3\,\rho\left(\alpha-\frac{x_0}{y_0}\right)\frac{y_0}{x_0}+\sigma+\frac{\rho}{y_0}\right\}\frac{y_0^4}{x_0^4}.$$

解出 x_0, y_0, 便得三点 $P_i(i=1, 2, 3)$:

$$x_0=\frac{2\,r\rho l}{Q_i},\quad y_0=\frac{2\,r\rho l^2\varepsilon^{2i}}{Q_i},\tag{2.18}$$

但 $\varepsilon^3=1$; $l^3=-\frac{r}{\rho}$, 且

$$Q_i=3\,ar\rho-3\,\alpha r^2+s\rho l\varepsilon^i+\sigma rl^2\varepsilon^{2i}(i=1, 2, 3).\tag{2.19}$$

这样得到的三点 P_i 称为曲线 C, $\overline{C}$ 在 O 点的主点并称 O 为关于三角形 $\{P_1, P_2, P_3\}$ 的调和直线为 Bompiani 直线。经过计算可得这条直线的方程为

$$\frac{s}{r}x+\frac{\sigma}{\rho}y=2,\quad z=0.\tag{2.20}$$

它与切线 t, $\bar{t}$ 的两交点是

$$\left(\frac{2\,r}{s},\ 0,\ 0\right),\ \left(0,\ \frac{2\,\rho}{\sigma},\ 0\right);\tag{2.21}$$

它们分别由 C, $\overline{C}$ 的 4 阶邻域所决定。

应当指出，当从共同密切平面 $z=0$ 而不在 t, $\bar{t}$ 上一点射影 C, $\overline{C}$ 到通过 t 的一平面，例如 $y=0$ 上时，则各射影曲线 C', $\overline{C}'$ 都以 O 为变曲点，并且（2.21）的第一点是它的 Bompiani 密切图形 O_4。这是 Bompiani 直线的另一个定义。由此，我们得到

定理4.12 设两空间曲线 C, $\overline{C}$ 交于一点 O, 在 O 有不同的切线 t, $\bar{t}$, 但有相同的密切平面 $[t, \bar{t}]$, 则存在通过 O 而在平面 $[t, \bar{t}]$ 上三条主直线和各直线上一个主点。这三个主点一般是不共线的，而且 O 关于它们所构成的三角形的调和直线是 Bompiani 直线。

从（2.18）不难求出三个主点共线的充要条件是

$$a\rho=\alpha r.\tag{2.22}$$

现在要寻找它的一个几何意义：

若一个二次曲面Q通过t，$\bar{t}$，且在O与C构成3阶接触，则它的方程必取如下的形式：

$$z=\frac{r}{a}xy+k_1xz+k_2yz+k_3z^2, \qquad (2.23)$$

式中k_1，k_2，k_3是参数．同样可以得到关于$\bar{C}$的二次曲面$\bar{Q}$，它的方程也取形式（2.31），只要把其中的$\frac{r}{a}$换为$\frac{\rho}{\alpha}$．所以得到

定理4.13 存在∞^3二次曲面，使各通过C，$\bar{C}$的切线t，$\bar{t}$且在O点与C，$\bar{C}$构成3阶接触的一个充要条件是三个主点共线。

还可以证明：在这些二次曲面中存在一个二次曲面束与C，$\bar{C}$在O点构成4阶接触．这个束就是（2.33）中取

$$k_1=\frac{s}{r}-\frac{b}{a}, \quad k_2=\frac{\sigma}{\rho}-\frac{\beta}{\alpha},$$

k_3为任意参数。（苏步青〔3〕）

此外，苏步青[1]还获得了由曲线C和$\bar{C}$在交点O的4阶邻域所决定的一个协变二次锥面Γ；这个锥面的作图是这样的：令K和$\bar{K}$分别表示曲线C和$\bar{C}$在O点的4阶接触的二次锥面，以t_n表示通过O点而在平面〔t，$\bar{t}$〕上的一直线，当t_n绕O在〔t，$\bar{t}$〕上转动时，则t_n关于K和$\bar{K}$的极平面的交线的轨迹是一个以O为顶点的二次锥面Γ．（见方德植〔10〕）

苏步青[2]利用了曲线C，$\bar{C}$的切线面的某些平截线得到了Bompiani直线的新定义：

设C^*，$\bar{C}^*$分别是C，$\bar{C}$的切线面与共同密切平面的交线，在交点O与C^*（或$\bar{C}^*$）构成3阶接触的二次曲线束Γ（或$\bar{\Gamma}$）在t（或$\bar{t}$）上决定了一点P（或$\bar{P}$），作$\bar{t}$（或t）关于Γ（或$\bar{\Gamma}$）中任一二次曲线的极，则直线$P\bar{P}$就是Bompiani直线。

在Γ（或$\bar{\Gamma}$）内有通过点$\bar{P}$（或P）的一条二次曲线Γ_1（或$\bar{\Gamma}_1$），Γ_1和$\bar{\Gamma}_1$交于O及另三点U_1，U_2，U_3．点O关于三角形$\{U_1, U_2, U_3\}$的调和直线是Bompiani直线。

4．两条准线 苏步青[1]获得了由曲线C，$\bar{C}$在交点O的五

阶邻域所决定的某些协变直线，就是由C，$\overline{C}$的密切线丛的公共直线组成的线汇的两条准线。

苏步青[17]把上面所得到的结果应用到曲面论上来，就是以C，$\overline{C}$作为曲面上的渐近曲线，解释了所谓Green棱和Wilczynski准线。同时阐明了锥面Γ是Calapso[1]锥面的推广，从而获得了它的新定义。

方德植[11]还得到两条相交空间曲线的其他的协变图形及某些性质。

上面所述的事实以及今后介绍的内容，为了节省篇幅，除了个别的情形外，一概不予证明，详细的叙述参考原著。

5．四维空间曲线的射影理论 苏步青[6]利用他自己所创造的"奇点表示法"以在纯几何的基础上来建立四维空间的射影曲线论。现在就要叙述他的理论是怎样建立起来的。

（1）标准标架与标准展开． 设$P(x)$为四维空间S^4中的一条解析曲线C上一个正常点，在C的点P的切线t上取一点$P_1(x_1)$，但$P_1 \neq P$；在C的密切平面S^2上，但不在t上取一点$P_2(x_2)$；在C的密切超平面S^3上，但不在S^2上取一点$P_3(x_3)$；最后在S^4中，但不在S^3上取一点$P_4(x_4)$。因此，决定了曲线C在P点的局部标架$\{PP_1P_2P_3P_4\}$，则S^4中任意点$M(z)$的射影齐次坐标可以写为

$$z=\xi^0 x+\xi^1 x_1+\xi^2 x_2+\xi^3 x_3+\xi^4 x_4,$$

式中ξ^0，ξ^1，ξ^2，ξ^3，ξ^4为M关于标架$\{PP_1P_2P_3P_4\}$和单位点$(x+x_1+x_2+x_3+x_4)$的局部坐标，若导入非齐次坐标z^k：

$$z^k=\frac{\xi^k}{\xi^0} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

且设M是在C上P的邻点，则C的方程可写为

$$z^1=t,\ i\,;\ z^i=t^i+\sum_{j=1}^{\infty} b_{i,i+j}t^{i+j} \quad (i=2,\ 3,\ 4). \quad (2.24)$$

其次，在这∞^{10}个标架$\{PP_1P_2P_3P_4\}$中选出∞^1个标架，那就是所谓标准标架。

设 P_1 是曲线 C 在 P 点的切线 t 上的一个指定点。以 P_2 表示从 P_1 作 C 的可展超曲面与其密切平面的交线在 P 点的密切二次曲线 K 的极线与 K 的一个交点，而不重合于点 P。通过 t 而属于 C 的密切空间 S^3 可以引 ∞^1 个平面，除 S^2 外其中任一平面和 C 的可展超曲面的交线以 P 为变曲点。若在这 ∞^1 个平面中选定一个，使得对应平截线的密切图形 O_4 与 P_1 重合，然后取 O_6 为 P_3。标准标架的第五个顶点是这样决定的：考虑 S^4 中而不在 C 的密切空间 S^3 中，且通过切线 t 的那些 ∞^2 个平面，由于每个平面和 C 的可展超曲面交于一条平截线 Γ，并且 Γ 与 t 在 P 具有 3 阶接触，在这 ∞^2 个平面里可以决定 ∞^1 个平面，使所对应的每条曲线 Γ 以 P 为可表示奇点；从此，每条曲线 Γ 在 P 各有 8 阶接触的密切四次代数曲线 C_4，并且这 C_4 具有一个三重点 O_8。C_4 在 O_8 的三条切线相重合，并与 t 交于一点 O_5，C 所在的平面与点 O_5 之间的对应是射影的。因此，我们可以决定唯一的平面，使它的对应点 O_5 与指定点 P_1 相重合。这样决定起来的曲线 Γ 的点 O_8 取作 P_4。于是标准标架 $\{PP_1P_2P_3P_4\}$ 已经完全由 P_1 而决定，记作 $R(P_1)$。

利用 $R(P_1)$ 求出展开式（2.24）中各系数 $b_{i,k}$ 之间的关系，并采用 Wronskian 的计算方法作为主要工具，成功地获得了曲线 C 的展开式：

$$
\begin{aligned}
z^1 &= t,\\
z^2 &= \frac{1}{2!}(t^2+20\theta_3 t^5+b_{2,6}t^6+b_{2,7}t^7+(8)),\\
z^3 &= \frac{1}{3!}(t^3+45\theta_3 t^6+b_{3,7}t^7+b_{3,8}t^8+(9)),\\
z^4 &= \frac{1}{4!}(t^4+72\theta_3 t^7+b_{4,8}t^8+b_{4,9}t^9+(10)).
\end{aligned}
$$

式中

$$b_{4,7}=72\theta_3,\quad b_{3,6}=45\theta_3,\quad b_{2,5}=20\theta_3,$$

但

$$15b_{4,8}-40b_{3,7}+36b_{2,6}=0.$$

（2）第一类、第二类和第三类射影弧素。假定曲线C上一动点P的坐标x都是一个参数u的函数，即$x=x(u)$。若取C的导点$x'=\frac{dx}{du}$作为$P_1(x_1)$，则所对应的标架$R(P_1)$称为C在P的基本标架。

若施行参数变换：$\bar{u}=f(u)$和坐标的比例因子的变换：$\bar{x}=\lambda x$，就获得了曲线的三个不变形式：

$$\theta_3 du^3,\quad \theta_4 du^4,\quad \theta_5 du^5,$$

其中θ_3是上面所定义的函数，θ_4满足下列关系：

$$3b_{4,8}-4b_{3,7}=4\theta_4,$$

$$5b_{3,7}-9b_{2,6}=5\theta_4,$$

$$\theta_5=6b_{2,7}-4b_{3,8}+b_{4,9},$$

上列三个形式分别称为曲线的第一类、第二类和第三类射影弧素。

利用可展超曲面的某些平截线可以解释这三个射影弧素：C的第一类射影弧素$\theta_3 du^3$除了一个常数因子外等于可展超曲面和密切平面S^2的交线C''的射影弧素；还可利用平截线C''，$C^{\text{Ⅱ}}$和某些代数曲线的接触不变式来表达第二类和第三类射影弧素$\theta_4 du^4$，$\theta_5 du^5$。

除了上列三个形式外，还有另一个不变式kdu^2，k是参数u的函数，称之为曲线C的曲率形式。

S^4的一曲线除了一个射影变换外由给定的四个形式：

$$kdu^2,\quad \theta_3 du^3,\quad \theta_4 du^4,\quad \theta_5 du^5$$

唯一地决定。

其次，按固有而不变的方法来规范化C的一般点P的射影齐次坐标x，称为P的法坐标。由于点P_1与参数u的选取无关。这时对应的$R(P_1)$称为Γ在P的法标架。

取C的第一类射影弧$\sigma=\int\sqrt[3]{\theta_3}\,du$为参数，则得到$C$的射影的Frenet公式：

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{d\sigma}=x_1,\\
&\frac{dx_1}{d\sigma}=4Kx+x_2,\\
&\frac{dx_2}{d\sigma}=264x+6Kx_1+x_3,\\
&\frac{dx_3}{d\sigma}=104Ix+108x_1+6Kx_2+x_4,\\
&\frac{dx_4}{d\sigma}=24(9J+12K-2I')x+8Ix_1\\
&\qquad\quad +48x_2+4Kx_3,
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

式中

$$K=k,\quad I=\theta_4,\quad J=\theta_5$$

表示曲线C的三个射影曲率。从此，导出曲线C的法坐标所满足的法式方程：

$$
\begin{aligned}
&x^{V}-20Kx'''-30(K'+14)x''-2(9K''-32K^2+56I)x'\\
&\quad -4(K'''-16KK'+14I'-240K+54J)x=0。
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

因（2.26）是由三个已知函数K，I，J而决定的，所以得到基本定理。

在某区域内给定任意三个解析函数$f_1(\sigma)$，$f_2(\sigma)$，$f_3(\sigma)$；在S^4中必存在一曲线，使得对于这区域的σ的各值，并且$K=f_1(\sigma)$，$I=f_2(\sigma)$，$J=f_3(\sigma)$是它的三个射影曲率，曲线的决定变成求方程（2.26）的四个线性无关解。

（3）$R(P_1)$与曲率形式及射影曲率K，I，J的几何解释。考虑C在P的密切超平面S^3与其切线面的交线C^*，并利用C^*与它在P的密切三次曲线C_3的主平面来决定P_1。从此，得到C在P的法标架$R(P_1)$的几何意义。为了解释射影弧σ，取C的切线面和它的任意一个基本标架$R(P_1)$的超平面$\{PP_1P_2P_4\}$的交线K，从K在P的邻点的切线关于四面体$\{PP_1P_2P_4\}$的 Von Staudt 的交比来表达射影弧素。

至于曲率形式$kd\sigma^2$与三个射影曲率K，I，J的几何意义参考熊全治[2]的一篇论文。

6. n 维空间曲线的射影理论 苏步青[10,11]为了把关于三维空间曲线论已经得到的结果推广到 n 维空间曲线论中去，应用了他自己创造的具有高阶奇点的平面曲线的密切图形而获得所预期的一系列结果，在所引证的论文里，很成功地利用 Wronskian 的计算法作为主要工具而达到所期望的目的。

（1）对应 Π 与对应 B。设 $P(x)$ 为 S^n 中解析曲线 C 上的正常点。$S^m(1 \leqslant m \leqslant n)$ 表示 C 在 P 点的 m 维密切空间。在切线 S^1 上取不重合于 P 的一点 $P_1(x_1)$，在 S^2 上取不切于 S^1 的一点 $P_2(x_2)$；在 S^3 中，但不在 S^2 上，取定一点 $P_3(x_3)$，一般来讲，在 S^m 中，但不在 S^{m-1} 中取定一点 $P_m(x_m)(1 \leqslant m \leqslant n)$。

若以 $x_m^1, x_m^2, \cdots, x_m^{n+1}$ 表示点 P_m 关于一个固定标架的齐次坐标，则 S^n 中的任意点 M 的坐标 $y^1, y^2, \cdots, y^{n+1}$ 可以表示为

$$y^i = \xi^0 x^i + \xi^1 x_1^i + \cdots + \xi^n x_n^i$$
$$(i=1, 2, \cdots, n+1), \qquad (2.27)$$

式中 $\xi^0, \xi^1, \cdots, \xi^n$ 为点 M 的局部射影齐次坐标；所参考的是以 $(x+x_1+\cdots+x_n)$ 做单位点的活动标架 $\{PP_1P_2\cdots P_n\}$。

导入非齐次坐标

$$z^k = \frac{\xi^k}{\xi^0} \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

且假定 M 为 C 上 P 的邻点，则 C 的展开式可写为

$$z^1 = t, \quad i!\, z^i = \sum_{j=0}^{\infty} b_{i, i+j} t^{i+j} \quad (i=2, 3, \cdots, n),$$

但系数 $b_{i,i} \neq 0$ $(i=2, 3, \cdots, n)$。

对于坐标 $x_m^i(i=1, 2\cdots, n+1;\ m=1, 2, \cdots, n)$ 各取适当的比例因子，常可使得

$$b_{i}, \quad i=1 \quad (\nu=2, 3, \cdots, n).$$

设 M 是 C 上一个动点，C 在 M 的 $S^{n-1}(M)$ 包络 C 的外接可展超曲面 Σ，它也是 Γ 在 M 的 $S^{n-2}(M)$ 的轨迹。

当 M 在 C 上变动时，$S^{n-2}(M)$ 与 Γ 在 P 的密切平面 $S^2(P)$ 的交点 Q 的轨迹是一曲线，以 C_2 表示在 P 的四点二次曲线；若

做切线 PP_1 上任意点 $P_\beta(\beta, 1, 0, 0)$ 关于 C_2 的极线，则在 $S^2(P)$ 上获得了一个配极，记作Π。

现在要建立另一个对应 B。设通过切线 PP_1 的平面 π_λ 属于 $S^3(P)$，但 $\pi_\lambda \neq S^2(P)$，以 K^3 表示可展超曲面Σ与 π_λ 的交线，则以 P 为变曲点；于是在 P 的四阶邻域决定了 Bompiani 密切图形 O_4，它和平面 π_λ 之间建立起一个射影对应，记作 B，它从 P 与 $S^2(P)$ 为一对对应元素。

（2）Bompinai 的一些定理的推广。现在来研究在 $S^3(P)$ 中取不通过 P 点的任意平面 α 做可展超曲面Σ的平截线。

设曲线 C 上有一个动点 M 和它的邻点 M'。两个密切空间 $S^{n-3}(M)$ 和 $S^{n-3}(M')$ 都属于密切空间 $S^{n-2}(M)$，而 $S^{n-2}(M)$ 与 α 的交点 x 的轨迹记作 (Γ_α)，那就是可展超曲面Σ与 α 的交线。从 P 射影 $S^{n-3}(M)$ 到平面 α 上去，它的象 Y 的轨迹记作 (C_α)，则 (Γ_α) 与 (C_α) 在 PP_1 和 α 的交点 P_α 处相切。从此证明了曲线 (Γ_α) 关于曲线 (C_α) 的接触不变式等于 $\frac{3}{4}$。

由 (Γ_α) 和 (C_α) 在 P_β 的三阶邻域可以决定一条 Bompiani 协变直线 r_0 与一个协变点 R_α；则对于 $S^3(P)$ 中的 ∞^3 个平面 α 只有 ∞^2 条直线 r_0 构成 ∞^1 个直线束，并且各束是以在 P 的切线 t 上一点 P_β 为中心，并且以通过 t 的一个平面 π_λ 为其平面的 P_β。P_β 与 π_λ 之间的对应是 Bompiani 对应 B。

所有协变点 P_α 都在 C 在 P 的密切平面上，α 与 t 的交点是 P_β，与直线 PR_α 之间的对应是配极Π。

（3）在一曲线的各维密切空间中的协变图形。

1° 在三维密切空间中的协变图形。首先把三维空间中已经获得的结果推广到 S^n 中来，那就是通过曲线 C 的切线 PP_1 引密切空间 $S^3(P)$ 内的一个平面 π，但不重合于 $S^2(P)$；则 π 与可展超曲面的交线是以 P 为变曲点的，而且当 π 绕 PP_1 旋转时，π 与 O_4 之间的对应是射影的，而直线 l_6 的轨迹是一个二次锥面，点 O_6 的轨迹是 $S^3(P)$ 中的一条三次空间曲线 Γ_3。

2° 可展超曲面的某些平截线．张素诚[1]研究了 S^n 中一曲线的可展超曲面的某些平截线，而把 S^3 中一曲线的一些结果推广到 S^n 中来，而获得了一些协变图形和几个射影对应。

苏步青把上述情形（(3)，1°）推广到在 $S^m(m\geqslant 3)$ 中的更普遍的结果，就是假定所取的平面通过曲线在 P 的切线 $S^1(P)$ 并属于 $S^m(P)(3\leqslant m\leqslant n)$，但不属于 $S^{m-1}(P)$，这时，由通过 $S^1(P)$ 的各平面决定了外接可展超曲面的平截线 K_m；它以 P 为高阶奇点，使它和 $S^1(P)$ 在 P 具有 $m-1$ 阶接触，由于 ∞^{m-2} 平面是通过 $S^1(P)$ 且属于 $S^m(P)$ 的，我们得着 ∞^1 平面，其中每个平面与外接可展超曲面的交线 K_m 以 P 为 m 阶可表示奇点。因此，在 K_m 所在的平面上可以找出一条 m 次代数曲线使它在 P 与 K_m 构成 $2m$ 阶接触，并且具有一个 $(m-1)$ 条一致切线的多重点 O_{2m}。并证明了：当 K_m 的平面在变动时，对应的协变直线 l_{2m-1} 在 $S^m(P)$ 中画成 $(m-1)$ 次二维锥面 $(3\leqslant m\leqslant n)$，对应的协变点 O_{2m-1} 画成 S^m 中的一条 m 次法曲线 Γ_m。

因此，在 S^n 的一曲线 C 的正常点 P 获得了依次属于 $S^3(P)$，$S^4(P)$，…，$S^n(P)$ 的一系列的法曲线 Γ_3，Γ_4，…，Γ_n。

（4）几个算术不变式．苏步青[13]以一个 $S_m(P)(3\leqslant m\leqslant n)$ 来代替 $S^3(P)$，把4．（2）中已经讲过的结果以两种不同的方式推广到更广泛的情况：

1° 考虑在 S^n 中的一曲线 C 和它的正常点 P。从 P 射影 C 的 $S^{n-3}(P)$ 获得可展超曲面和射影超锥面，它们与 $S^m(P)(3\leqslant m\leqslant n)$ 中的平面 α 分别交于曲线 (Γ_α) 和 (C_α)，但 α 与 C 的切线 $S^1(P)$ 交于一点 P_β。他证明了曲线 (Γ_α) 和 (C_α) 都以 P_β 为同型的奇点，并构成了一个 Segre 不变式

$$I_m=m\cdot(m-1)^{-\frac{m-1}{m-2}}\quad(3\leqslant m\leqslant n),$$

平面 α 与维数 m 无关。

因此，得到一系列算术不变式：

$$I_3=\frac{3}{4},\quad I_4=\frac{4}{9}\sqrt{3},\quad I_5=\frac{5}{8}\sqrt{2},\quad \cdots,$$

$$I_n = n\cdot(n-1)^{-\frac{n-1}{n-2}},$$

那就是S^n中一条曲线C在P的（$n-2$）个不变式。

2° 其次，设想在C的$S^m(P)$中的任一（$m-1$）维空间〔$m-1$〕，使得这〔$m-1$〕与C的切线$S^1(P)$的交点P_β不重于P。对于这样任意已知空间〔$m-1$〕总可以按下述方法做出两条曲线（Γ^*_{m-1}）和（C^*_{m-1}）：在C上的动点M引其$n-m+1$维密切空间$S^{n-m+1}(M)$使与$S^m(P)$中任意指定的空间〔$m-1$〕交于一点X：这交点的轨迹是〔$m-1$〕中通过P_β的一条曲线〔Γ^*_{m-1}〕的密切空间$S^{n-m}(M)$来代替$S^{n-m+1}(M)$，此外，从P射影Γ，在M的密切空间$S^{n-m}(M)$，使得（$n-m+1$）维的射影超锥面和空间〔$m-1$〕交于一点Y，于是得到它的轨迹（C^*_{m-1}），从而证明了（Γ^*_{m-1}）和（C^*_{m-1}）上点X和Y构成一对一的对应，使得（Γ^*_{m-1}）在其任意一点X的p维密切空间$\Sigma^*_p(x)$($0\leqslant p\leqslant m-1$）属于（$C^*_{m-1}$）在对应点$Y$的（$p+1$）维密切空间$S^*_{p+1}(Y)$。当$M$沿$\Gamma$趋近于$P$时，$X$和$Y$都趋近于$P_\beta$，所以（$\Gamma^*_{m-1}$）和（$C^*_{m-1}$）在公共点$P_\beta\equiv\Sigma$。有公共密切空间$\Sigma_1$，…，$\Sigma_{m-1}\equiv$〔$m-1$〕。象Segre所证明的那样，对这样一对曲线必有$m-2$个接触不变式。因此便导出另一系列的算术不变式

$$J_k=\frac{k}{2^{k-1}}\quad(k=3,\ 4,\ \cdots,\ m).$$

这些关于$S^m(P)$中切空间〔$m-1$〕($3\leqslant m\leqslant n$）都是一样的。

（5）两条曲线的接触不变式。B. Segre[1]曾得到了这样的定理：在n维空间中具有公共点和在这点的一切密切空间的两条曲线之间必存在（$n-1$）个射影接触不变式。

这个定理还有下面的推广：

设C和Γ是S^n中两条曲线并且有公共点和维数到k（$k\leqslant n-1$）为止的公共密切空间S^p($p=1,\ 2,\ \cdots,\ k$)，于是在非齐次坐标Z^1，Z^2，…，Z^n下可以表示这些曲线的方程为下列形式：

$$Z^1 = t,\ i!Z^i = \sum_{j=0}^{\infty} b_{i,i+j} t^{i+j} \quad (i = 2, \cdots, n)$$

和

$$Z^1 = t,\ q!Z^q = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{q,\ q+j} t^{q+j} \quad (q = 2, \cdots, k),$$

$$r!Z^r = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{r,\ k+1+j} t^{k+1+j} \quad (r = k+1, \cdots, n),$$

则（$n-1$）个量

$$J_p = \beta_{p,p} b_{p,p} \quad (p = 2, \cdots, k)$$

是这两条曲线的接触不变式。

特别，不变式 J_2 是公共密切平面 S^2 上的两曲线 C_2^* 和 Γ_2^* 的 Segre 不变式；这时，C_2^* 和 Γ_2^* 依次是 C 和 Γ 的外接可展超曲面与平面 S^2 的交线。

剩下的问题是寻找不变式 J_3，…，J_n 的解释。

陈省身[1,2]曾利用一些超平面的交比来表示另外一个不变式 I_k，但是苏步青证明了 I_k 与 J_p 之间有如下的关系：

$$I_k = J_k : J_{k-1},$$

若应用到上列两曲线 C_p^* 和 Γ_p^*，则得到：

$$I_p = J_p : J_{p-1} \quad (p = 3, 4, \cdots, k),$$

或即

$$J_p = J_2 I_3 \cdots I_p \quad (p = 3, 4, \cdots, k).$$

因此，J_3，J_4，…，J_k 的意义通过 I_3，…，I_k 得到解释。

苏步青[18]还获得了这些不变式 J_q（$q = 2, 3, \cdots, k$）的别种简单解释。

此外，苏步青[19]与周彭年[1]指出 B. Segre 定理的推广对于两个流形也有它的类似结果。

§4.3. 曲面的射影微分几何

关于曲面的射影微分几何的研究，由于许多几何学家的努

力，曾经获得了卓越的成就，例如：Wilczynski，Fubini，Bompiani，Sannia，苏步青等都是这方面研究者中杰出的人物。值得注意的是，我国几何学家关于这方面的研究已经得到了较大的成就。关于这方面的丰富内容，在本书中除了叙述作者的一些成果外，只作扼要的介绍，至于详细的论述，请参考苏步青〔Ⅰ〕，〔Ⅱ〕，以及其他有关专著。

1. 射影曲面论的基础 在这一段里，先介绍曲面的一些基本元素与基本方程等作为今后论述的基础。

（1）渐近曲线与曲面的基本方程. 在三维射影空间 P_3 中考虑一个齐次射影坐标系。令 S 是一个解析的非直纹面，它的参数向量方程为 $x=x(u,\ v)$，因为在曲面 S 上任意正常点 (x) 的切面是由点 x，x_u，x_v 决定的，所以这个平面的方程可写为

$$|X\ x\ x_u\ x_v|=0, \tag{3.1}$$

式中的下标表示偏导数。在曲面 S 上取一条曲线 Γ：

$$u=u(t),\quad v=v(t),$$

使它为一渐近曲线的充要条件是在每点的密切平面与曲面的切面重合，即

$$|x\ x_u\ x_v\ d^2x|=0. \tag{3.2}$$

由于 $dx=x_udu+x_vdv$，$d^2x=x_{uu}du^2+2x_{uv}dudv+x_{vv}dv^2+x_ud^2u+x_vd^2v$，代入上式，即可得出渐近曲线的微分方程：

$$|x\ x_u\ x_v\ x_{uu}|du^2+2|x\ x_u\ x_v\ x_{uv}|dudv+|x\ x_u\ x_v\ x_{vv}|dv^2=0. \tag{3.3}$$

若取渐近曲线为参数曲线 u，v，则 $dudv=0$，因此，由(3.3)可知

$$|x\ x_u\ x_v\ x_{uu}|=0,\quad |x\ x_u\ x_v\ x_{vv}|=0.$$

从而必有 u，v 的数量函数 p，q，α，β，γ，δ，使得

$$\begin{aligned}x_{uu}&=px+\alpha x_u+\beta x_v,\\ x_{vv}&=qx+\gamma x_u+\delta x_v.\end{aligned} \tag{3.4}$$

按照

$$(x_{uvv})_u=(x_{uuv})_v,$$

就可得到可积条件。特别，注意到 x_{uv} 的系数可知 $\alpha_v=\delta_u$，所以存在一个函数 θ，使得 $\alpha=\theta_u$，$\delta=\theta_v$，于是（3.4）变为

$$x_{uu}=px+\theta_u x_u+\beta x_v,$$
$$x_{vv}=qx+\gamma x_u+\theta_v x_v. \tag{3.5}$$

这个方程组称为曲面的**基本方程**，并且只要取适当的比例因子，总可以使

$$\theta=\ln(\beta\gamma), \tag{3.6}$$

满足（3.5）和（3.6）的坐标 x 称为 Fubini **法坐标**，两点（x）和（x_{uv}）的连线称为曲面在点（x）的**射影法线**。

若以点 x，x_u，x_v，x_{uv} 作为 P 点的活动标架（局部四面体）的顶点，则对空间中任意点 M（x）的射影齐次坐标可写为

$$x=x_1x+x_2x_u+x_3x_v+x_4x_{uv},$$

其中 x_1，x_2，x_3，x_4 表示点 M 关于四面体 $\{x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uv}\}$ 的局部坐标，导入非齐次坐标：

$$x=\frac{x_2}{x_1},\quad y=\frac{x_3}{x_1},\quad z=\frac{x_4}{x_1}.$$

设 X（x，y，z）为曲面 S 上 P 点的任一邻点，则不难求出 z 关于 x，y 的幂级数展开式〔见 Lane，〔Ⅰ〕，129 页〕。

$$z=xy-\frac{1}{3}(\beta x^3+\gamma y^3)+\frac{1}{12}(\beta\varphi x^4-4\beta\psi x^3y$$
$$-6\theta_{uv}x^2y^2-4\gamma\varphi xy^3+\gamma\psi y^4)+\cdots, \tag{3.7}$$

式中

$$\varphi=(\ln\beta\gamma^2)_u,\quad \psi=(\ln\beta^2\gamma)_v. \tag{3.8}$$

从展开式(3.7)可以看出，曲面 S 和它在 P 点的切面 $z=0$ 的交线 C 以 P 为二重点，C 的二重切线就是 S 在 P 点的两条渐近切线。

基本方程（3.5）还有如下的类型。事实上，若令 $x=e^{\frac{1}{2}\theta}y$，则（3.5）可化为

$$\begin{aligned} y_{uu}&=\beta y_v-c_1y,\\ y_{vv}&=\gamma y_u-c_2y, \end{aligned} \tag{3.9}$$

式中β，γ不变。令$\beta=-2b$，$\gamma=-2a$，则上式又可写为

$$
\begin{aligned}
&y_{uu}+2by_v+c_1y=0,\\
&y_{vv}+2ay_u+c_2y=0,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

称为 Wilczynski 型的基本方程。

这里应当指出：当$\beta=0$时，则有$y_{uu}=-c_1y$，这表示曲线u是直线的条件，即渐近曲线有一系是直线，所以是直纹面。$\gamma=0$也一样。因而$\beta=0$，$\gamma=0$所表示的曲面为二次曲面。在以后的讨论中，经常假定$\beta\gamma\neq 0$，即曲面不是直纹面。

为了以后研究上方便起见，这里特别来决定一切渐近切线属于线丛的条件。

从上式，我们有

$$\beta y_v=y_{uu}+c_1y,$$

把这个等式关于u连续求导两次，可得如下形式的方程：

$$y_{uuuu}+4b_1y_{uuu}+6c_2y_{uu}+4d_3y_u+e_4y=0,$$

式中

$$b_1=-\frac{1}{2}(\ln\beta)_u,\quad c_2=-\frac{1}{6}(\ln\beta)_{uu}-(\overline{\ln\beta})_u^2-2c_1+\beta_v,$$

$$d_3=\frac{1}{4}[2c_{1u}-\beta^2\gamma-2c_1(\ln\beta)_u],\quad e_4=(*),$$

又

$$p_2=c_2-b_1^2-b_{1u}=\frac{1}{3}(\ln\beta)_{uu}-\frac{1}{12}(\overline{\ln\beta})_u^2+\frac{1}{3}c_1-\frac{1}{6}\beta_v,$$

$$q_3=d_3-3b_1c_2+2b_1^3=\frac{1}{2}c_{1u}-\frac{1}{4}\beta^2\gamma-\frac{1}{4}(\ln\beta)_u(\ln\beta)_{uu}$$

$$+\frac{1}{2}(\ln\beta)_{uuu}-\frac{1}{4}\beta(\ln\beta)_u(\ln\beta)_v,$$

$$\theta_3=q_3-\frac{3}{2}p_{2u}=\frac{1}{4}\beta[(\ln\beta)_{uv}-\beta\gamma],$$

所以渐近曲线u的射影弧可写为

$$d\sigma=\sqrt[3]{\frac{1}{4}\beta[(\ln\beta)_{uv}-\beta\gamma]}\,du.\tag{3.11}$$

所以渐近曲线 u 属于同一线丛的条件是 $\theta_3=0$ （见苏步青〔I〕，79—80页），即

$$(\ln\beta)_{uv}=\beta\gamma. \tag{3.12}$$

同理得曲线 v 属于线丛的条件

$$(\ln\gamma)_{uv}=\beta\gamma. \tag{3.13}$$

所以一切渐近曲线属于同一线丛的条件是这两式同时成立，相减得

$$\ln\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)_{uv}=0, \tag{3.14}$$

这表明，可写

$$\ln\frac{\beta}{\gamma}=f_1(u)-\varphi_1(v),$$

或即

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{f(u)}{\varphi(v)}. \tag{3.15}$$

满足 $\ln\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)_{uv}=0$ 的曲面称为等温渐近曲面，又名为 Fubini 曲面，有时简称F曲面。若取适当的参数 u，v 可使这个条件化为

$$\beta=\gamma.\ （证略）$$

最后指出，基本方程（3.5）的可积条件是

$$\begin{gathered}\gamma L_v+(\beta\gamma^2)_u=0,\quad \beta M_u+(\beta^2\gamma)_v=0,\\ \gamma L_u+2L\gamma_u+\gamma_{uuu}=\beta M_v+2M\beta_v+\beta_{vvv},\end{gathered} \tag{3.16}$$

式中

$$\begin{aligned}L&=\theta_{uu}-\frac{1}{2}\theta_u^2-\beta_v-\beta\theta_v-2p,\\ M&=\theta_{vv}-\frac{1}{2}\theta_v^2-\gamma_u-\gamma\theta_u-2q.\end{aligned} \tag{3.17}$$

（证明从略，见苏步青〔I〕。）

如果引用记号：$f^{ik}=\dfrac{\partial^{i+k}f}{\partial u^i\partial u^k}$，把 Wilczynski 型的基本方程改写为

$$y^{20}+2by^{01}+c_1y=0,$$
$$y^{02}+2ay^{10}+c_2y=0, \tag{3.18}$$

也可求出它的可积条件是

$$a^{20}+c_2^{10}+2ba^{01}+4ab^{01}=0,$$
$$b^{02}+c_1^{01}+2ab^{10}+4ba^{10}=0, \tag{3.19}$$
$$c_1^{02}+2ac_1^{10}+4a^{10}c_1=c_2^{20}+2bc_2^{01}+4b^{01}c_2.$$

（2）法形式．在曲面S上一点$P(u,\ v)$引二渐近曲线$u,\ v$．在每条曲线上分别取一点$P'(u+du,\ v)$，$P''(u,\ v+dv)$．在P，P'，P''各引渐近切线，这四条直线在一阶无穷小范围内可以看作属于同一个线束（因渐近曲线与曲面S构成二阶接触）．

现在要计算这四条直线的交比：

设P点的坐标为$x(u,\ v)$，则在P的两条渐近切线的Plücker坐标分别为

$$(x,\ x_u),\ (x,\ x_v).$$

在P'，P''的渐近切线的坐标分别为

$$(x,\ x_u)+(x,\ x_{uu})du,$$
$$(x,\ x_v)+(x,\ x_{vv})dv,$$

由基本方程（3.5）可得

$$(x,\ x_{uu})=\theta_u(x,\ x_u)+\beta(x,\ x_v),$$
$$(x,\ x_{vv})=\theta_v(x,\ x_v)+\gamma(x,\ x_u).$$

代入上列两式，可得在P'，P''的渐近切线的坐标分别为

$$\{\theta_u du+1\}(x,\ x_u)+\beta du(x,\ x_v),$$
$$\gamma dv(x,\ x_u)+\{\theta_v dv+1\}(x,\ x_v).$$

由此可见，在一阶无穷小范围内，这四条直线属于同一个线束．它们的交比是

$$\frac{\beta du}{\theta_u du+1}:\frac{\theta_v dv+1}{\gamma dv}=\frac{\beta\gamma du dv}{(1+\theta_u du)(1+\theta_v dv)}.$$

所以它的主要部分是$\beta\gamma du dv$，因此，做

$$\varphi_2=2\beta\gamma du dv, \tag{3.20}$$

这是曲面S的固有且不变的量。又做

$$\frac{F_3}{F_2}=\frac{\beta du^3+\gamma dv^3}{2dudv}, \tag{3.21}$$

也是固有且不变的。所以若做两个形式

$$\beta\frac{du^2}{dv},\quad \gamma\frac{dv^2}{du}, \tag{3.22}$$

也为固有且不变的；因为它们的乘积的两倍

$$2\left(\beta\frac{du^2}{dv}\cdot\gamma\frac{dv^2}{du}\right)=\varphi_2,$$

又它们的算术平均为

$$\frac{1}{2}\left(\beta\frac{du^2}{dv}+\gamma\frac{dv^2}{du}\right)=\frac{F_3}{F_2}.$$

形式（3.20）和（3.21）都是Fubini所发现的，所以形式φ_2称为Fubini法形式，形式（3.21）称为Fubini射影弧素。至于(3.22)的两个形式是Bompiani最早（1926）发现的，称为Bompiani初等形式。这些形式曾经有过各种不同的几何作图法。Bompiani最早（1926）给出他的几何意义，但是结果很繁，后来（1936)(见Bompiani〔7〕）他利用第二种线素比较简单地解释了上述两个形式。此外，A．Terracini[3]也研究过曲面的射影线素。

在这里引用与曲面有联带关系的两对二次曲线（见方德植〔7〕)：其中一对是和曲面S在P点的切面与S的交线的两支分别构成四点接触的二次曲线。另一对是和通过曲面S上一点P的渐近曲线的切线曲面与S在P点的切面的交线分别构成四点接触的二次曲线；再者，在曲面S上取P的邻点$\overline{P}$，在一阶无穷小范围内$\overline{P}$可以看作S在P的切面上的点，则直线$P\overline{P}$和上述两对中的每条二次曲线除P外再交于另一点。因此，从P，$\overline{P}$和这些交点依一定的次序做其交比，就可以很简单地把Bompiani初等形式和Fubini射影弧素表达出来。为此，首先求出上述两对二次曲线的方程。

在（1）中已经指出，曲面S和在P的切面的交线C以P为

二重点，C的二重切线就是S在P的两条渐近切线。

以C_u表示曲线C和切线u相切的一支，则由展开式（3.7）可以看出沿C_u的展开式可写为

$$y=\frac{1}{3}\beta x^2-\frac{1}{12}\beta\varphi x^3+\cdots,\quad z=0, \tag{3.23}$$

则从此不难求出在P与C_u构成四点接触的二次曲线，记作K_u（以后简称为四点二次曲线）的方程

$$\frac{1}{3}\beta x^2-\frac{1}{4}\varphi xy-y+ky^2=0,\quad z=0, \tag{3.24}$$

式中k是参数。

同样地，交换C的两支C_u和C_v，就得到C_v在P点的四点二次曲线K_v的方程：

$$\frac{1}{3}\gamma y^2-\frac{1}{4}\psi xy-x+hx^2=0,\quad z=0, \tag{3.25}$$

式中h是参数。

切线v：$z=x=0$，关于（3.24）中任意一条二次曲线的极P_u的坐标是$\left(-\frac{4}{\varphi},\ 0,\ 0\right)$；切线$u$：$z=y=0$，关于（3.25）中任意一条二次曲线的极$P_v$是$\left(0,\ -\frac{4}{\psi},\ 0\right)$。

现在在束（3.24）中决定一曲线Γ_u，使它通过P_v，它的方程是

$$\frac{1}{3}\beta x^2-\frac{\varphi}{4}xy-y-\frac{\psi}{4}y^2=0,\quad z=0. \tag{3.26}$$

同样地，在束（3.25）中决定一曲线Γ_v，使它通过P_u，即

$$\frac{1}{3}\gamma y^2-\frac{\psi}{4}xy-x-\frac{\varphi}{4}x^2=0,\quad z=0. \tag{3.27}$$

现在求另一对二次曲线的方程，利用方程（3.5）不难求出渐近曲线u的展开式：

$$\begin{aligned}y&=ax^2+bx^3+\cdots,\\ z&=\gamma x^3+sx^4+\cdots,\end{aligned} \tag{3.28}$$

式中

$$a=\frac{1}{2}\beta,\quad b=-\frac{1}{6}\beta\varphi,\quad \gamma=\frac{1}{6}\beta,\quad s=-\frac{1}{12}\beta\varphi. \tag{3.29}$$

其次作渐近曲线 u 的切线曲面与 S 的切面的交线，它的方程是

$$y=\frac{3}{4}ax^2+\frac{3}{8}\frac{as}{\gamma}x^3+\cdots.$$

从此就可得出这条曲线的四点二次曲线：

$$\frac{3}{8}ax^2+\frac{1}{2}\frac{s}{\gamma}xy-y+\bar{k}y^2=0,\quad z=0,$$

或即

$$\frac{3}{8}\beta x^2-\frac{\varphi}{4}xy-y+\bar{k}y^2=0,\quad z=0, \tag{3.30}$$

式中 $\bar{k}$ 是参数。

只要交换 u 和 v，立刻写出渐近曲线 v 的切线曲面与曲面 S 的切面的交线的四点二次曲线，即

$$\frac{3}{8}\gamma y^2-\frac{\psi}{4}xy-x+\bar{h}x^2=0,\quad z=0, \tag{3.31}$$

$\bar{h}$ 是参数。

兹将在束（3.30）中决定一条曲线 $\overline{\Gamma}_u$，使它通过 $P_v\left(0,\frac{4}{\psi},0\right)$，它的方程是

$$\frac{3}{8}\beta x^2-\frac{\varphi}{4}xy-y-\frac{\psi}{4}y^2=0,\quad z=0. \tag{3.32}$$

同样地，在束（3.31）中决定一条曲线 $\overline{\Gamma}_v$，使它通过 $P_u\left(-\frac{4}{\varphi},0,0\right)$，它的方程是

$$\frac{3}{8}\gamma y^2-\frac{\psi}{4}xy-x-\frac{\varphi}{4}x^2=0,\ z=0. \tag{3.33}$$

下面来阐述两个初等形式和射影线素的几何意义。

在曲面 S 上取 P 的邻点 $\overline{P}(u+du,\ v+dv)$，在一阶无穷

小范围内 $\overline{P}$ 可以看作在 P 的切面上，即

$$\overline{P}=x+x_u du+x_v dv,$$

也就是 $\overline{P}$ 的局部坐标是 $x_1=1$，$x_2=du$，$x_3=dv$，$x_4=0$。于是直线 $P\overline{P}$ 上任意点的坐标可写为

$$\rho x_1=\lambda+1,\ \rho x_2=du,\ \rho x_3=dv,\ \rho x_4=0, \tag{3.34}$$

式中 ρ 为比例因数，λ 为参数。P 点所对应的参数 $\lambda_1=\infty$，$\overline{P}$ 点所对应的参数 $\lambda_2=0$。

为了求直线 $P\overline{P}$ 和二次曲线 Γ_u，$\overline{\Gamma_u}$ 的交点，把它们的方程写成关于齐次坐标的形式：

$$\Gamma_u:\ \frac{1}{3}\beta x_2^2-\frac{\varphi}{4}x_2x_3-x_1x_3-\frac{\psi}{4}x_3^2=0,\ x_4=0.$$

$$\overline{\Gamma}_u:\ \frac{3}{8}\beta x_2^2-\frac{\varphi}{4}x_2x_3-x_1x_3-\frac{\psi}{4}x_3^2=0,\ x_4=0.$$

设 $P\overline{P}$ 和 Γ_u，$\overline{\Gamma_u}$ 的交点除 P 点外分别交于 Q，$\overline{Q}$，则以 (3.34) 分别代入就得到 Q，$\overline{Q}$ 的对应参数 λ_3，λ_4 所满足的关系：

$$\frac{1}{3}\beta du^2-\frac{\varphi}{4}dudv-(\lambda_3+1)dv-\frac{\psi}{4}dv^2=0,$$

$$\frac{3}{8}\beta du^2-\frac{\varphi}{4}dudv-(\lambda_4+1)dv-\frac{\psi}{4}dv^2=0,$$

从此，得

$$\lambda_3=\frac{1}{3}\beta\frac{du^2}{dv}-\frac{\varphi}{4}du-\frac{\psi}{4}dv-1,$$

$$\lambda_4=\frac{3}{8}\beta\frac{du^2}{dv}-\frac{\varphi}{4}du-\frac{\psi}{4}dv-1.$$

因此，就可求出 P，Q，$\overline{P}$，$\overline{Q}$ 四点的交比：

$$(PQ,\ \overline{P}\overline{Q})=(\infty\lambda_3,\ 0\lambda_4)=\frac{\lambda_3-\lambda_4}{\lambda_3}$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{3}\right)\beta\frac{du^2}{dv}}{1-\frac{1}{3}\beta\frac{du^2}{dv}+\frac{1}{4}\varphi du+\frac{1}{4}\psi dv}$$

$$=\frac{1}{24}\beta\frac{du^2}{dv}+\cdots.$$

同样地，设 $P\bar{P}$ 与 Γ_v，$\bar{\Gamma}_v$ 分别交于 R，$\bar{R}$，则交比

$$(PR,\ \overline{PR})=\frac{1}{24}\gamma\frac{dv^2}{du}+\cdots,$$

因此，我们得到

定理4.14 设 t_u，t_v 表示曲面 S 在 P 点的切面和 S 的交线的两支曲线 C_u，C_v 的切线，令 P_u，P_v 分别为 t_u，t_v 关于 C_u 在 P 点的四点二次曲线 K_u，K_v 的极。在二次曲线束 K_u，K_v 中分别决定一曲线 Γ_u，Γ_v 使其分别通过 P_v，P_u。其次，设 C^*，$\bar{C}^*$ 表示曲面 S 通过 P 点的两条渐近曲线的切线曲面和 S 在 P 点的切面的交线，且以 $\bar{K}_u$，$\bar{K}_v$ 表示 C^*，$\bar{C}^*$ 在 P 点的四点二次曲线，在束 $\bar{K}_u$，$\bar{K}_v$ 中分别决定一曲线 $\bar{\Gamma}_u$，$\bar{\Gamma}_v$ 使其分别通过 P_v，P_u。再次，在曲面 S 上取 P 的邻点 $\bar{P}(1,\ du,\ dv,\ 0)$，作直线 $P\bar{P}$ 与 Γ_u，$\bar{\Gamma}_u$ 和 Γ_v，$\bar{\Gamma}_v$ 除 P 外的交点 Q，$\bar{Q}$ 和 R，$\bar{R}$，则除了一个常数 $\frac{1}{24}$ 外交比 $(PQ,\ \overline{PQ})$ 与 $(PR,\ \overline{PR})$ 的主要部分分别等于形式 $\beta\frac{du^2}{dv}$ 与 $\gamma\frac{dv^2}{du}$。

单单利用上定理中二次曲线对 Γ_u，Γ_v，或单单利用 $\bar{\Gamma}_u$，$\bar{\Gamma}_v$ 都可以表达曲面 S 的射影线素。

设在曲面 S 上取 P 的邻点 $P'(1,\ du,\ -dv,\ 0)$，则直线 PP' 上任意一点的坐标可写为

$$\rho x_1=\gamma+1,\ \rho x_2=du,\ \rho x_3=-dv,\ \rho x_4=0,$$

式中 γ 为参数。设直线 PP' 与 Γ_u，Γ_v 除 P 点外再交于点 T，T'，跟上面同样的方法求得 T，T' 的对应参数：

$$\gamma_3=-\frac{1}{3}\beta\frac{du^2}{dv}-\frac{\varphi}{4}du+\frac{\psi}{4}dv-1,$$

$$\gamma_4=-\frac{1}{3}\gamma\frac{dv^2}{du}+\frac{\psi}{4}dv-\frac{\varphi}{4}du-1.$$

从此，得到交比

$$(PT,\ P'T')=\frac{\gamma_3-\gamma_4}{\gamma_3}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\left(\beta\frac{du^2}{dv}+\gamma\frac{dv^2}{du}\right)}{1+\frac{1}{3}\beta\frac{du^2}{dv}+\frac{\varphi}{4}du-\frac{\psi}{4}dv}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{\beta du^3+\gamma dv^3}{2dudv}+\cdots,$$

由此推出

定理 4.15 取定理 4.14 中二次曲线对 Γ_u, Γ_v，其次取曲面 S 上 P 的一个邻点 $P'(1,\ du,\ -dv,\ 0)$，作直线 PP' 与 Γ_u, Γ_v 的交点 T，T'，则交比 $(PT,\ P'T')$ 的主要部分除常数因子 $\frac{2}{3}$ 外，等于曲面的射影线素。

完全类似地，若直线 PP' 与曲线对 $\bar{\Gamma}_u$，$\bar{\Gamma}_v$ 的交点为 U, U'，则不难求出交比 $(PU,\ P'U')$ 的表达式：

$$(PU,\ P'U')=\frac{3}{4}\ \frac{\beta du^3+\gamma dv^3}{2dudv}+\cdots.$$

于是，得到

定理 4.16 取定理 4.14 中二次曲线对 $\bar{\Gamma}_u, \bar{\Gamma}_v$ 的交点 U，U'，则交比 $(PU,\ P'U')$ 的主要部分除常数因子 $\frac{3}{4}$ 外，等于曲面的射影线素。

（3）射影变形　为了阐明射影线素的重要性，我们导入曲面的射影变形的概念和理论。

在欧氏几何中一个很重要的问题是关于一个曲面的变形（等距变换）问题（见 § 2.3.9）。就是决定一曲面 S' 使它与一已知曲面 S 在 Gauss 意义之下互为变形的问题。现在设 S，S' 在 Gauss 意义之下是互为变形的，则 S, S' 之间必存在一个点对点的对应，就是所谓变形的对应。设 P，P' 是任意一对对应点，不管 $du:dv$ 怎样，在 P，P' 处的曲面线素必相等；换句话说，必存在一个运动 M，以 M 把 $P\to P'$ 且以 P 的一阶邻域变到 P' 的一

阶邻域。就是说，从P出发引S的任一曲线C与S'上的对应曲线C'，施行M后，则C变到另一曲线Γ'，Γ'通过P'且与C'在P'构成一阶解析接触。所谓解析接触是指：设两条空间曲线的齐次坐标分别为$x(u)$与$x(v)$，且令在O点构成n阶接触，则存在两个函数$\rho(u)$，$\varphi(u)$，使得

$$x'=\rho x,\quad v=\varphi(u)$$

满足如下的关系：

$$v_0=\varphi(u_0),$$

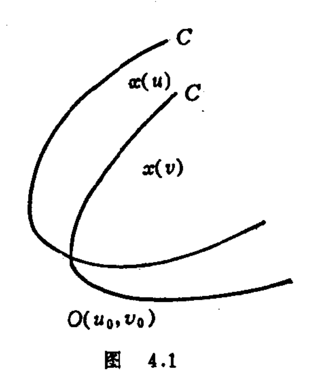


图 4.1

且在$(u_0,\ v_0)$处：$x=x'$，$\dfrac{d^rx}{du^r}=\dfrac{d^rx'}{du^r}$ $(r=1,2,\cdots,n)$。

这时，任取一个函数$\sigma(u)\neq 0$，不难验证

$$\bar{x}=\sigma x,\quad \bar{x}'=\sigma x'$$

也满足上述条件。所以这时的接触由$v=\varphi(u)$而决定的。因而称C，C'关于对应$v=\varphi(u)$构成n阶解析接触。

特别，当$\varphi=u$，即$v=u$，这时说C，C'在O做成n次解析接触。

上述的运动M当然由对应点P，P'而决定。换句话说，P，P'变到另一对对应点时，则所对应的运动M是要改变的。若M对任一对对应点而不改变时，则S，S'在M之下是迭合的，因而这个情形无意义，可以除去不论。

若对应为共形时：$ds^2=\lambda d\bar{s}^2$，这时也可采用上述思想来定

义共形对应，所不同者就是上述的C，Γ'的接触不是解析接触，因为差一个因子$\frac{d^r x}{du^r}\neq\frac{d^r x'}{du^r}$。

现在把上述思想推广到射影微分几何中去。

设两个曲面S，S'之间存在点对应，并且对S的任意点P总可以决定一个射影变换T，使P变到S'的对应点P'，在S上通过P的任意曲线C变到Γ'，并且Γ'与C的对应曲线C'在点P'构成二阶解析接触，则S，S'称为互为射影变形的曲面。

现在要寻找两个曲面S，S'互为射影变形的条件．为此，采用这样的曲线坐标，u，v，使S，S'在对应点具有相同的坐标u，v，从而对任意一对对应点$u=u_0$，$v=v_0$存在一个射影变换T，使得

$$T:\ x,\ dx,\ d^2x\longrightarrow x',\ dx',\ d^2x'.$$

T与u_0，v_0的值有关，但和du，dv，d^2u，d^2v，$dudv$无关。当选取适当的$\rho=\rho(u,\ v)$时，则

$$T:\ \rho x,\ d(\rho x),\ d^2(\rho x)\rightarrow x',\ dx',\ d^2x'.$$

也就是说，在$u=u_0$，$v=v_0$处：经过T后，各点

$$\rho x,\ \rho_u x+\rho x_u,\ \rho_v x+\rho x_v,$$
$$\rho_{uu}x+2\rho_u x_u+\rho x_{uu},$$
$$\rho_{uv}x+\rho_u x_v+\rho_v x_u+\rho x_{uv},$$
$$\rho_{vv}x+2\rho_v x_v+\rho x_{vv}$$

分别变到各点x'，x'_u，x'_v，x'_{uu}，x'_{uv}，x'_{vv}。所以

$$(x',\ x'_u,\ x'_v,\ d^2x')=|T|(\rho x,\ \rho_u x+\rho x_u,\ \rho_v x+\rho x_v,\ d^2(\rho x))=|T|\rho^4(x,\ x_u,\ x_v,\ d^2x),$$
$$u=u_0,\quad v=v_0.$$

由此可见，两个方程

$$(x,\ x_u,\ x_v,\ d^2x)=0,\ (x',\ x'_u,\ x'_v,\ d^2x')=0$$

在S，S'的任意对应点处必须相同。换句话说：

一个曲面的渐近曲线在射影变形后仍是渐近曲线。

下面取S，S'的渐近曲线为参数曲线。

这时，从曲面S的基本方程 (3.5)，我们得到

$$\rho_{uu}x+2\rho_u x_u+\rho x_{uu}=\left[\left(\frac{\rho_{uu}}{\rho}+p\right)-\left(\theta_u+2\frac{\rho_u}{\rho}\right)\frac{\rho_u}{\rho}-\beta\frac{\rho_v}{\rho}\right]\rho x+\left(\theta_u+2\frac{\rho_u}{\rho}\right)(\rho x_u+\rho_u x)+\beta(\rho x_v+\rho_v x),$$

经过T后，这点变为

$$\left[\left(\frac{\rho_{uu}}{\rho}+p\right)-\left(\theta_u+2\frac{\rho_u}{\rho}\right)\frac{\rho_u}{\rho}-\beta\frac{\rho_v}{\rho}\right]x'+\left(\theta_u+2\frac{\rho_u}{\rho}\right)x'_u+\beta x'_v,$$

并且必须与点

$$x'_{uu}=p'x'+\theta'_u x'_u+\beta' x'_v$$

重合，式中的系数p'，θ'，β'，γ'表示S'的对应量。

但在 (u_0, v_0)，ρ及其导数的值可以任意取，所以只要$\beta'=\beta$成立就够了。

同样，若从$\rho_{vv}x+2\rho_v x_v+\rho x_{vv}$出发，就可得到$\gamma=\gamma'$。

反过来，若在S，S'的对应点成立

$$\beta=\beta',\quad \gamma=\gamma',$$

则可选取$\rho\neq 0$，ρ_u，ρ_v，ρ_{uu}，ρ_{uv}，ρ_{vv}在这点的值，使上列的一些条件成立。因此，我们有

定理 4.17 两个曲面互为射影变形的一个充分必要条件是：两个曲面的渐近曲线互相对应，并且在对应点的β，γ的值相等。

上面已经指出，一曲面的射影弧素可以看作

$$\beta\frac{du^2}{dv}\text{和}\gamma\frac{dv^2}{du}$$

的平均值。所以上面的定理可改述如下：

定理 4.18 两个曲面互为射影变形的一个充要条件是：两个曲面在对应点射影线素相等。

对互为射影变形的两个曲面取适当的坐标x，可使

$$F_2=F_2',\quad F_3=F_3',$$

因为 F_2，$F_2'\to\sigma^2F$，σ^2F'。原来 F_2 与 F_2' 只差一个因子，所以取适当的 σ 可使 $F_2=F_2'$。又因 $ds=d\bar{s}$。于是 $F_s=F_s'$。

（4）Bompiani-Klobouček 二次曲面。设 C 是曲面 S 上任意一条曲线。从 C 的每点引渐近曲线 $u=\text{const}$ 的切线，得到直纹面 R_u；当然，R_u 通过 C。同样，从渐近曲线 $v=\text{const}$ 的切线也可得到一个直纹面 R_v。由于 R_u，R_v 是由 C 完全决定的，故称 R_u，R_v 为曲线 C 的渐近直纹面。设 O 是 C 上任意一点，l 为通过 O 并属于 R_v 的母线。作 R_v 沿 l 的密切二次曲面 Q_v°。（即由 l 及其二邻近母线决定的二次曲面。）直纹面 R_v 的一系弯曲的渐近曲线的每条切线与 R_v 交于三重点，就是与 R_v 的三条邻近母线相交。所以，从 l 的每点各引 R_v 的弯曲渐近曲线的切线，其轨迹是二次曲面 Q_v°。同样，可得 R_u 的二次曲面 Q_u°。我们称 Q_u°，Q_v° 为 C 在 O 的两个渐近密切二次曲面。

至于对 Q_u°，Q_v° 的方程的求法与求 Lie 的二次曲面的求法类似（见第三章，§3.3.6）。这里不重述。结果，Q_v° 上任意点 $\bar{x}$ 是

$$\begin{aligned}\bar{x}=x_u+\lambda x+\mu\big[&(\theta_u+\lambda)u'x_u+(\beta u'+\lambda v')x_v+v'x_{uv}\\&+(A\lambda^2+B\lambda+C+pu')x\big],\end{aligned}\tag{3.35}$$

$$A=u',\quad B=\theta_u u'+\beta\frac{u'^2}{v'}-\frac{1}{2}\,\frac{v''}{v},$$

$$\begin{aligned}C=\frac{1}{2v'^2}\Big[&\beta u'\Big(\beta u'^2+\theta_u u'v'-\frac{\beta u}{\beta}u'v'-2\frac{\pi_{11}}{\beta}v'^2\Big)\\&-\beta u''-\theta_v v'v''+v'^2\{\beta\theta_v u'-(\theta_{uv}+\beta\gamma)v'\}\Big]\end{aligned}$$

$$(\pi_{11}=p+\beta_v+\beta\theta_v).$$

式中 λ，μ 表示 Q_v° 的参数。

现在在曲面 S 上特别取这样一条曲线 Γ，使它在 $O(0,0)$ 与渐近曲线 $u=0$ 相切，则 Γ 的方程可取如下的形式：

$$u=-\frac{h}{2}\gamma v^2+(3),\tag{3.36}$$

式中 γ 表示 γ 在 O 点的值，h 是常数。

容易验证，h 的值对渐近参数 u，v 的变换是不变的。现在回到曲面曲线 C，特别是上述曲线 Γ 时，则由 (3.36)，在 O 便有

$v'=1$，$v''=0$，$u=v=0$，$u'=0$，$u''=-h\gamma$，从(3.35)得到

$$A=0,\quad B=0,\quad C=-\frac{1}{2}\{\theta_{uv}+(1-h)\beta\gamma\}.$$

这时，对应的二次曲面 Q_v^* 是

$$\bar{x}=\left[\lambda-\frac{1}{2}\{\theta_{uv}+(1-h)\beta\gamma\}\mu\right]x+x_u+\lambda\mu x_v+\mu x_{uv}.$$

从其局部坐标中消去 λ，μ 得到它们的代数方程：

$$x_1x_4-x_2x_3+\frac{1}{2}\{\theta_{uv}+(1-h)\beta\gamma\}x_4^2=0. \qquad (3.37)$$

取形式

$$x_1x_4-x_2x_3+kx_4^2=0 \qquad (k\text{ 为参数}) \qquad (3.37)'$$

的二次曲面束称为 Darboux 二次曲面束。所以 (3.37) 是一个 Darboux 二次曲面，式中 h 称为 Darboux 二次曲面束的指数。

注意到变换 β，γ，u，v 这个方程不变。所以若以 Γ'：

$$v=-\frac{h}{2}\beta u^2+(3)$$

代换 Γ，作 Q_u^*，则有 $Q_u^*\equiv Q_v^*$。因而得到

定理4.19 任一 Darboux 二次曲面容有两种不同的作图法，并且每个二次曲面是由它的指数 h 决定的。(见 Fubini〔Ⅰ〕。)

Darboux 二次曲面束 (3.37)′ 关于非齐次坐标的方程是

$$z-xy'+kz^2=0 \qquad (k\text{ 参数}), \qquad (3.37)''$$

与曲面 S 在 P 点的展开式比较，不难推出这种曲面的一个特性：

束中任一曲面与曲面 S 构成二阶接触，并与 S 的交线以 P 为三重点；在这点的三条切线的方程是

$$\beta x^3+\gamma y^3=0,\quad z=0. \qquad (3.38)$$

这三条切线称为 Darboux 切线。它们与两渐近切线是反配极的。

Darboux二次曲面束中有几个比较重要的二次曲面：

1° Lie的二次曲面。对应指数 $h=0$，这时所采用的曲线 Γ 与 Γ' 可以是渐近曲线 $u=0$ 与 $v=0$。这就是Lie原来定理的内容（第三章，§3.3.6(3.28)）。

2° Wilczynski的二次曲面。指数 $h=1$，从而方程(3.37)变为

$$x_1x_4-x_2x_3+\frac{1}{2}\theta_{uv}x_4^2=0. \tag{3.39}$$

所取的曲线 Γ 与 Γ' 都是以 O 为变曲点，这是Bompiani的定义。(见Bompiani〔8〕）后来Lane[1]指出，Bompiani所得到的二次曲面就是Wilczynski的规范二次曲面。这个二次曲面还跟一曲面的渐近曲线网的调和线汇有密切联系（苏步青〔20〕）。就是：设 P_1 和 P_2 是曲面 S 在一点 O 的两条渐近曲线上的两点，并且线汇（P_1P_2）与渐近线网是调和的。在 P_1 与 P_2 各引有关共轭网 N_{P_1} 与 N_{P_2} 的另一切线 P_1L_1 与 P_2L_2，并从 O 引直线 OO_3 使与 P_1L_1，P_2L_2 都相交，则两直线 OO_3 与 P_1P_2 关于Wilczynski的二次曲面是共轭直线。

3° Fubini的二次曲面，指数 $h=\frac{1}{3}$。所采用的曲线 Γ 与 Γ' 在 O 都有稳定的密切平面。

4° 二重切平面。$h=\infty$。

在这里还要指出指数 h 的一个几何意义：若通过 P 的任一直线 l_1 与曲面（3.37）交于除 P 外的一点 P_h，并设 l_1 与Lie的二次曲面、Wilczynski的二次曲面分别交于（除 P 外）P_0，P_1，则 P，P_0，P_1，P_h 四点的交比等于 h。（见Lane〔2〕。）

最后介绍一些类似的二次曲面的作图法：设 C 为曲面 S 上一条曲线，它的方程为 $\frac{dv}{du}=\lambda$。从 C 的每点 P 与一定点 O 分别引渐近曲线 u 与 v，使交于点 P_1，P_2，并作直线 PP_1，PP_2。当 P 在曲线 C 上变动时，则称 PP_1 与 PP_2 所画成的直纹面 $R^{(u)}$ 与 $R^{(v)}$ 为 C 的渐近弦纹面。我们以这些渐近弦纹面代替上述的渐近直纹面，

则可同样地导出C在O的两个二次曲面$Q_0^{(u)}$，$Q_0^{(v)}$，称为渐近弦密切二次曲面（见Bompiani〔9〕）。它们的方程是：

$$Q_0^{(u)}:\quad 4\left[x_1x_4-x_2x_3+\frac{1}{2}(\theta_{uv}+\beta\gamma)x_4^2\right]-\frac{2}{3}\gamma\lambda^2x_2x_4$$
$$+2\gamma\lambda x_3x_4+\gamma\left\{\left(\theta_u+\frac{2\gamma_u}{\gamma}\right)\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left(\theta_v+\frac{2\beta_v}{\beta}\right)\lambda^2+\lambda'\right\}x_4^2=0,$$

$$Q_0^{(v)}:\quad 4\left[x_1x_4-x_2x_3+\frac{1}{2}(\theta_{uv}+\beta\gamma)x_4^2\right]-\frac{2\beta}{\lambda}x_2x_4$$
$$-\frac{2}{3}\ \frac{\beta}{\lambda^2}x_3x_4+\beta\left\{\left(\theta_v+\frac{2\beta_v}{\beta}\right)\frac{1}{\lambda}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left(\theta_u-\frac{2\gamma_u}{\gamma}\right)\frac{1}{\lambda^2}-\frac{\lambda'}{\lambda^3}\right\}x_4^2=0.$$

现在，考察C在O点的密切平面π：

$$2\lambda[\lambda x_2-x_3]+[\lambda'+\beta-\theta_u\lambda+\theta_v\lambda^2-\gamma\lambda^3]x_4=0;$$

π与$Q_0^{(u)}$交于一条二次曲线。若变动C而使它在O常切于方向λ的定切线，则这二次曲线的轨迹是一二次曲面$\overline{Q}_0^{(u)}$：

$$4\left[x_1x_4-x_2x_3+\frac{1}{2}(\theta_{uv}+\beta\gamma)x_4^2\right]-\frac{8}{3}\gamma\lambda^2x_2x_4$$
$$+4\gamma\lambda x_3x_4+\left\{\beta\gamma+2\gamma\varphi\lambda-\frac{2}{3}\gamma\psi\lambda^2+\gamma^2\lambda^3\right\}x_4^2=0.$$

交换$Q_0^{(u)}$与$Q_0^{(v)}$，就可以写出另一类似的二次曲面$\overline{Q}_0^{(v)}$的方程、称$\overline{Q}_0^{(u)}$，$Q_0^{(v)}$为导来渐近二次曲面（吴祖基〔2〕）。特别，当C趋于O点的渐近曲线u（$v=0$）或曲线v（$u=0$）时，则$\overline{Q}_0^{(u)}$，$\overline{Q}_0^{(v)}$都趋于同一二次曲面

$$x_1x_4-x_2x_3+\frac{1}{2}\left(\theta_{uv}+\frac{3}{2}\beta\gamma\right)x_4^2=0.$$

这就是指数$h=-\frac{1}{2}$的Darboux二次曲面。

（5）曲面的规范直线。通过曲面S上一点P而不在切面上的直线

$$x+k\psi z=0,\quad y+k\varphi z=0 \tag{3.40}$$

称为曲面S在点P的第一类规范直线，记作$l_1(k)$，方程(3.40)中的k为任意常数；在切面上而不通过P的直线

$$z=0,\quad 1+k\varphi x+k\psi y=0\ (k:\ 任意常数) \tag{3.41}$$

称为曲面S在点P的第二类规范直线，记作$l_2(k)$，它们的公共点$C(0,\ -\psi,\ \varphi,\ 0)$称为规范点，于是构成一直线束，有时称为规范线束。

一切规范直线$l_1(k)$在同一平面上，称为规范平面。

显然，对于同一个常数k的两规范直线$l_1(k)$与$l_2(k)$关于S在P的 Lie 的二次曲面

$$z-xy+\frac{1}{2}(\theta_{uv}+\beta\gamma)z^2=0 \tag{3.42}$$

是共轭直线。

规范直线中，特别重要地指出下列三对：

当$k=0$时，射影法线，

当$k=\frac{1}{4}$时，Green 棱，

当$k=\frac{1}{2}$时，Wilczynski 准线。

此外，若$k\to\infty$，则有两点(x)，$(\psi x_u+\varphi x_v)$的连线，称为规范切线。

还要指出：由方程(3.38)；$\beta x_2^3+\gamma x_3^3=0$，$x_4=0$所确定的 Darboux 切线，记作$D_r(r=0,1,2)$，关于平面坐标$(u_1,u_2,u_3,u_4)$的方程是

$$\beta u_3^3-\gamma u_2^3=0,\quad u_1=0.$$

由方程

$$\beta u_3^3+\gamma u_2^3=0,\quad u_1=0 \tag{3.43}$$

所确定的直线称为Segre切线，记作$S_r(r=0,1,2)$。关于非齐次点坐标的方程是

$$\beta x^3-\gamma y^3=0,\quad z=0. \tag{3.43$'$}$$

沿 Segre 切线进行的曲面曲线称为 Segre 曲线。

关于规范直线的几何作图是一个重要的问题，过去不少几何

学家给出了各种不同的几何意义．在这里论述作者对于这方面的工作（见方德植〔9〕）．

1° 锥面 C_6 与锥面 C_4 的方程．为了解释规范直线的意义，先来设计一个六阶锥面作为主要工具，同时导出了一些新的规范直线的几何作图法．

在（2）已指出，Fubini 的第一形式 $2\beta\gamma du dv$ 是曲面的一个绝对不变式．使积分

$$\int(\beta\gamma v')^{1/2}du \qquad \left(v'=\frac{du}{dv}\right)$$

的第一变分

$$\delta\int(\beta\gamma v')^{1/2}du=0$$

的解所定义的曲线称为射影测地线，它所满足的方程是

$$\lambda'=\theta_u\lambda-\theta_v\lambda^2 \qquad \left(\lambda=\frac{du}{dv},\ \lambda'=\frac{d\lambda}{dv}\right), \qquad (3.44)$$

以 C_λ 表示通过曲面 S 上一点 P 的射影测地线，做 C_λ 在 P 的两个渐近密切二次曲面 Q_u，Q_v，就是（4）中所述的关于 C_λ 在 P 的 Bompiani-Klobouček 二次曲面；Q_u，Q_v 的交线除在 P 的两条渐近切线外，还交于一条二次曲线，它所在的平面的方程是

$$\begin{aligned}2\lambda(\beta+\gamma\lambda^3)(x_3-\lambda x_2)+[&(\beta+\gamma\lambda^3)(\lambda'-\beta+\gamma\lambda^3)\\&+(\ln\gamma)_u\beta\lambda-2(2\psi-\theta_v)\beta\lambda^2+(2\varphi-\theta_u)\gamma\lambda^4\\&-(\ln\beta)_v\gamma\lambda^5]x^4=0,\end{aligned}$$

其中 λ 是方程（3.44）的解，这平面的局部坐标是

$$\begin{aligned}&\rho u_1=0,\ \rho u_2=-2\lambda^2(\beta+\gamma\lambda^3),\ \rho u_3=2\lambda(\beta+\gamma\lambda^3),\\&\rho u_4=(\beta+\gamma\lambda^3)(\lambda'-\beta+\gamma\lambda^3)+(\ln\gamma)_u\beta\lambda-(2\psi\\&\qquad-\theta_v)\beta\lambda^2+(2\varphi-\theta_u)\gamma\lambda^4-(\ln\beta)_v\gamma\lambda^5 \qquad (\rho\neq0).\end{aligned}$$

通过 P 引曲面 S 的一切射影测地线 C_λ，则所对应的这些平面的包络是一个六阶锥面，为了求出它的方程，只要由（3.44）所确定的 λ' 代入这个方程，然后齐次地消去 λ，就得到所求的结果：

$$
\begin{aligned}
&(\beta u_3^3-\gamma u_2^3)(\beta u_3^3+\theta_u u_3^2 u_2)+\theta_v u_3 u_2^3+\gamma u_2^3-2u_4u_3u_2 \\
&\quad+\beta(\ln\gamma)_u u_3^5 u_2+(2\psi-\theta_v)\beta u_3^4 u_2^2 \\
&\quad-(2\varphi-\theta_u)\gamma u_3^2 u_2^4-\gamma(\ln\beta)_v u_3 u_2^5=0,
\end{aligned}
$$

$$u_1=0.$$

为了以后计算简单些，把这个方程化为下面的形式：

$$
\begin{aligned}
&C_6\equiv(\beta u_3^3-\gamma u_2^3)(\beta u_3^3+\gamma u_2^3-2u_4u_3u_2)+u_2u_3\{\varphi u_3(\beta u_3^3 \\
&\quad-2\gamma u_2^3)+\psi u_2(2\beta u_3^3-\gamma u_2^3)\}=0,
\end{aligned}
$$

$$u_1=0. \tag{3.45}$$

从这个方程立刻可以得到：

定理4.20 曲面S在点$P(x)$所对应的锥面C_6与S在P的切面沿两条渐近切线和三条 Darboux 切线相切。

因为在P的切面的坐标是（0，0，0，1），锥面C_6和切面相切的地方从

$$\frac{\partial C_6}{\partial u_4}=0,\quad u_1=0$$

来求，即

$$u_2u_3(\beta u_3^3-\gamma u_2^3),\quad u_1=0, \tag{3.46}$$

$u_1=u_2=0$ 与 $u_1=u_3=0$ 分别表示通过x轴与y轴的平面，$u_1=0$，$\beta u_3^3-\gamma u_2^3=0$ 表示通过P的三条 Darboux 切线。

现在利用锥面C_6与以每一渐近切线做轴的两个平面束做一个线性系统：

$$C_6+\lambda u_2^6+\mu u_3^6=0;$$

在这个系统里只能找到一个分解的锥面 $u_2u_3=0$，$u_1=0$ 和另一个四阶锥面C_4：

$$
\begin{aligned}
&C_4\equiv 2u_4(\beta u_3^3-\gamma u_2^3)-\varphi u_3(\beta u_3^3-2\gamma u_2^3) \\
&\quad-\psi u_2(2\beta u_3^3-\gamma u_2^3)=0,\qquad u_1=0.
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

2° 一致曲面的特征（见方德植〔8〕）。

所谓一致曲面就是解析地定义为函数φ与ψ都恒等于零，但$\beta\gamma\neq0$的曲面。

通过曲面S上一点P引一切泛测地线，那就是使积分

$$\int \frac{\beta + \gamma v'^3}{v'} du$$

取极值的解所定义的曲线。通过P点的所有泛测地线的密切平面的包络也是一个六阶锥面，通称为Segre[2] **锥面**，它的方程是

$$2(\beta u_3^3 - \gamma u_2^3)(\beta u_3^3 + \gamma u_2^3 - 2u_4u_3u_2)$$
$$+ u_2u_3\left\{\frac{\varphi}{2}u_3(\beta u_3^3 - 2\gamma u_2^3) + \frac{\psi}{2}u_2(2\beta u_3^3 - \gamma u_2^3)\right\} = 0,$$
$$u_1 = 0.$$

它和锥面(3.45)一致的条件由比较系数就知道是：$\varphi = 0$，$\psi = 0$。因此，得到一致曲面的一个特征：

定理4.21 在曲面S上一点P引一切射影测地线C_λ的渐近二次曲面，这些曲面相交的二次曲线所在平面的包络构成一个六阶锥面，它与Segre锥面一致是曲面S是一个一致曲面的特征。

现在转到求一致曲面的另一个特征。

为此，考虑曲面S的两个Bompiani初等形式$\beta\frac{du^2}{dv}$，$\gamma\frac{dv^2}{du}$，使两个积分

$$\int \frac{\beta}{v'} du, \quad \int \gamma v'^2 du \quad \left(v' = \frac{du}{dv}\right)$$

取极值所满足的微分方程分别为

$$\lambda' = \frac{1}{2}(\ln\beta)_u\lambda + (\ln\beta)_v\lambda^2$$

和

$$\lambda' = -(\ln\gamma)_u\lambda - \frac{1}{2}(\ln\gamma)_v\lambda^2.$$

若使这两个方程确定曲面上同一曲线系，则不难推出$\varphi = 0$，$\psi = 0$，于是曲面是一个一致曲面；其逆也成立。因而推出一致曲面的第二个特征：

定理4.22 曲面S的两个Bompiani初等形式取极值的解所定义的两系超测地线一致是曲面S为一致曲面的特征。

3° **规范直线的几何作图法**。我们先应用C_6来定义规范直

线。

定理4.23 通过一渐近切线 A_r 引任意一个平面，做其关于锥面 C_6 的第一配极，则这些配极中有一个公共切面是曲面 S 在 P 点的切面 π，其中还有一个公共切面 α，通过另一条渐近切线 $A_s(s \neq r)$，则两平面 α_1，α_2 交于第一规范直线 $l_1\left(\frac{1}{2}\right)$，这通称为第一 Wilczynski 准线。

证 通过渐近切线 A_1：$y = z = 0$ 任意一个平面的平面坐标是

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 1,\ u_4 = \rho,$$

其中 ρ 是参数，这些平面关于锥面 C_6 的第一配极由下面的方程确定：

$$\frac{\partial C_6}{\partial u_3} = 0,\ \ u_1 = 0;\ \ \frac{\partial C_6}{\partial u_4} = 0,\ u_1 = 0. \tag{3.48}$$

使它们通过渐近切线 A_1 的条件是 $u_3 = 0$，于是从(3.46)可知$\left(\frac{\partial C_6}{\partial u_4}\right)_{u_3=0} = 0$总是满足的；因此，只要决定 u_2, u_4 使$\left(\frac{\partial C_6}{\partial u_3}\right)_{u_3=0} = 0$则可。实际上，

$$\frac{1}{u_2}\left(\frac{\partial C_6}{\partial u_3}\right)_{u_3=0} = 2\gamma u_2^3 u_4 - \psi\gamma u_2^4$$

$$= -2\gamma u_2^3\left(\frac{1}{2}\psi u_2 - u_4\right) = 0.$$

所以平面 α_1 的坐标是$\left(0,\ 1,\ 0,\ \frac{\psi}{2}\right)$，它的方程是

$$x + \frac{\psi}{2} z = 0.$$

同法可以求得平面 α_2 的方程是

$$y + \frac{\varphi}{2} z = 0.$$

这两个平面的交线就是第一规范直线 $l_1\left(\frac{1}{2}\right)$。 证毕。

定理4.24 上定理中一切第一配极除了平面 π，α_r 外还有三个公共切面，分别通过三条 Darboux 切线 D_0，D_1，D_2 而构成

一个三面体，设 P_r 表示切面 π 关于三面体的极线，以 T' 表示由 P_1，P_2 所决定的平面与 π 的交线，则 T' 关于 P_1，P_2 调和共轭直线是一条规范直线 $l_1\left(\frac{2}{3}\right)$。

证　已经讲过通过 A_1 的平面（0，0，1，0）关于锥面 C_6 的第一配极的切面，由方程（3.48）所确定；但

$$\frac{\partial C_4}{\partial u_4}=-2u_2u_3(\beta u_3^3-\gamma u_2^3)。$$

由此可见，第一配极的公共切面中除了 π 外还有三个分别通过三条 Darboux 切线 D_0，D_1，D_2：

$$\beta u_3^3-\gamma u_2^3=0，\ u_1=0。$$

现在要求出这三个平面的第四个坐标 u_4；令

$$u_2=1，\ u_3=\varepsilon^r P \qquad (r=0，1，2)，$$

式中

$$P=\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}}，\ \varepsilon^3=1，$$

把这些数值代入 $\frac{\partial C_6}{\partial u_3}=0$ 中，再经过简单的计算，得

$$u_4=\frac{7}{6}\psi+\frac{\varphi}{6}\varepsilon^r P+\varepsilon^{2r}P^2\beta \quad (r=0，1，2)，$$

于是所求的公共切面的方程是

$$x+\varepsilon^r P y+\left\{\frac{7}{6}\psi+\frac{\varphi}{6}\varepsilon^r P+\varepsilon^{2r}P^2\beta\right\}z=0$$
$$(r=0，1，2)，$$

或即

$$x+\left(\frac{7}{6}\psi z\right)+\varepsilon^r P\left(y+\frac{\varphi}{6}z\right)+\varepsilon^{2r}P^2\beta z=0$$
$$(r=0，1，2)。$$

从此得到平面 π：$z=0$ 关于由这三个平面构成的三面体的极线 p_1：

$$x+\frac{7}{6}\psi z=0,\quad y+\frac{\varphi}{6}z=0;$$

按同法得极线 p_2 的方程

$$y+\frac{7}{6}\varphi z=0,\quad x+\frac{\psi}{6}z=0,$$

$$p_1:\quad x:y:z=-\frac{7}{6}\psi:-\frac{\varphi}{6}:1,$$

$$p_2:\quad x:y:z=-\frac{\psi}{6}:-\frac{7}{6}\varphi:1.$$

由 p_1，p_2 所决定的平面方程可写为如下的形式：

$$\varphi x+\psi y+fz=0,$$

式中 f 为 φ，ψ 的函数，于是这平面与 π 的交线 T' 的方程为

$$x:y:z=\psi:-\varphi:0.$$

因此得到 T' 关于 p_1，p_2 的调和共轭直线：

$$x:y:z=-\frac{2}{3}\psi:-\frac{2}{3}\varphi:1,$$

这就是规范直线 $l_1\left(\frac{2}{3}\right)$。　　证毕。

定理4.25　通过每一条渐近切线 A_r 的任一平面关于锥面 C_6 的第四配极的公共切面中只有一个平面 β_r 通过另一渐近切线，则 β_1，β_2 两个平面的交线是一条规范直线 $l_1(1)$。

证　通过 A_1 的任一平面（0，0，1，ρ）关于锥面 C_6 的第四配极的方程是

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_3}+\rho\frac{\partial}{\partial u_4}\right)^4 C_6=0.$$

因为 C_6 关于 u_4 是一次的，所以上式可化为

$$\frac{\partial^4 C_6}{\partial u_3^4}+4\rho\frac{\partial^4 C_6}{\partial u_3^3\partial u_4}=0,$$

通过 A_2 的条件是 $u_3=0$，现在只要决定 $u_2:u_4$ 使满足

$$\left.\frac{\partial^4 C_6}{\partial u_3^3\partial u_4}\right|_{u_3=0}=0,\quad \left.\frac{\partial^4 C_6}{\partial u_4^4}\right|_{u_3=0}=-2u_2u_4\beta 4!+2\beta\psi u_2^2 4!=0.$$

所以 $u_2:u_4=1:\psi$，从此得平面 β_1 的方程：$x+\psi z=0$；同理平

面 β_2 的方程是 $y+\varphi z=0$，这二平面交于规范直线 $l_1(1)$。

证毕。

定理4.26 通过每一条渐近切线 A_r 可以引一个平面 β'_r，使 β'_r 关于锥面 C_6 的第二配极分解为一个锥面 C_r 与以另一条渐近切线 $A_s(s\neq r)$ 为轴的一个平面束；平面 β'_r 与另一锥面 $C_s(s\neq r)$ 沿一条直线 g_r 相切，则 g_1，A_2 所决定的平面与 g_2，A_1 所决定的平面交于Fubini主直线 $l_1\left(\frac{1}{6}\right)$。设由 g_1，g_2 所决定的平面与切面 π 的交线为 T''，则T''关于 g_1，g_2 的调和共轭直线是规范直线 $l_1\left(\frac{7}{12}\right)$。

实际上，定理中的平面 β'_1, β'_2 分别重合于定理4.20中的平面 β_2，β_1；所以根据这个定理的作图法，也可定义规范直线 $l_1(1)$。

证 通过 A_1 的任一平面（0，0，1，ρ）关于锥面 C_6的第二配极是

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_3}+\rho\frac{\partial}{\partial u_4}\right)^2 C_6=0, \quad u_1=0,$$

或即

$$\frac{\partial^2 C_6}{\partial u_3^2}+2\rho\frac{\partial^2 C_6}{\partial u_3\partial u_4}=0, \quad u_1=0,$$

由计算，得

$$\begin{aligned}&-24\beta u_2u_3^2u_4+30\beta^2u_3^4+u_2\{18\varphi\beta u_3^3+2\varphi(\beta u_3^3-\gamma u_2^3)\\&+24\psi\beta u_2u_3^2\}+2\rho\{-2u_2(\beta u_3^3-\gamma u_2^3)-6\beta u_2u_3^3\}=0,\qquad(3.49)\\&u_1=0.\end{aligned}$$

现在决定 ρ，使它分解为一个锥面 C_1 与以 $A_2(0, u_2, 0, u_4)$ 为轴的一个平面束。为此，只要以 $u_3=0$ 代入 (3.49)，简化之，得

$$\rho=\varphi;$$

于是所对应的平面 β'_1 是 $y+\varphi z=0$，这就是定理4.20中的平面 β_2。同理可知平面 β'_2 是定理4.20中的平面 β_1：$x+\psi z=0$。

以 $\rho=\varphi$ 代入方程（3.49），得

$u_3^2(12u_2u_4-2\varphi u_2u_3-12\psi u_2^2-15\beta u_3^2)=0$，$u_1=0$。

锥面 C_1 的方程为

$C_1\equiv 12u_2u_4-2\varphi u_2u_3-12\psi u_2^2-15\beta u_3^2=0$，$u_1=0$。

而平面 $\beta_2'(0, 1, 0, \psi)$ 的坐标代入满足这方程，故 β_2' 与 C_1 相切，又定理中所述的直线 g_2 的方程为

$$x:y:z=\frac{\partial C_1}{\partial u_2}:\frac{\partial C_1}{\partial u_3}:\frac{\partial C_3}{\partial u_4}=-6\psi:-\varphi:6.$$

同理，直线 g_1 的方程是

$$x:y:z=-\psi:-6\varphi:6.$$

由 A_1，g_2 所决定的平面的方程为

$$y+\frac{\varphi}{6}z=0.$$

由 A_2，g_1 所决定的平面的方程为

$$x+\frac{\psi}{6}z=0.$$

所以这两个平面的交线就是 Fubini 直线 $l_1\left(\frac{1}{6}\right)$。

其次，从 g_1，g_2 的方程两边相加即得由 g_1，g_2 所决定的平面与 π 的交线 T'' 关于 g_1，g_2 的调和共轭直线

$$x:y:z=-\frac{7}{12}\psi:-\frac{7}{12}\varphi:1,$$

即规范直线 $l_1\left(\frac{7}{12}\right)$。

证毕。

定理4.27 通过 Darboux 切线 D_r 可以引一平面 δ_r 使 δ_r 关于锥面 C_6 的第一配极分解为一个锥面 C_r 和以 Segre 切线 S_r 为轴的一个平面束，则切面 π 关于 δ_0，δ_1，δ_2 构成三面体的极线是曲面的射影法线。

证 通过 Darboux 切线 D_r 的任一平面的坐标是

$$u_1:u_2:u_3:u_4=0:1:\varepsilon^r P:\rho,$$

式中

$$P=\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}},\ \varepsilon^3=1,\ \rho\text{是参数。}$$

关于 C_6 的第一配极是

$$\frac{\partial C_6}{\partial u_2}+\varepsilon^r P\frac{\partial C_6}{\partial u_3}+\rho\frac{\partial C_6}{\partial u_4}=0,\quad u_1=0.$$

经过计算后便得

$$\begin{aligned}&2u_3u_4(\beta u_3^3-\gamma u_2^3)-8\gamma u_2^3u_3u_4+6\gamma^2u_2^5\\&-u_3\{\varphi u_3(\beta u_3^3-8\gamma u_2^3)+\psi u_2(4\beta u_3^3-5\gamma u_2^3)\}\\&+\varepsilon^r P[2u_2u_4(\beta u_3^3-\gamma u_2^3)+6\beta u_3^3u_2u_4-6\beta^2u_3^5\\&-u_2\{\varphi u_3(5\beta u_3^3-4\gamma u_2^3)+\psi u_2(8\beta u_3^3-\gamma u_2^3)\}]\\&+2\rho u_2u_3(\beta u_3^3-\gamma u_2^3)=0,\quad u_1=0.\end{aligned}\tag{3.50}$$

兹将决定 ρ，使它分解为一个锥面 C_r 和以 Segre 切线 S_r 为轴的一个平面束。S_r 的方程是

$$x-\varepsilon^r Py=0,\quad z=0.$$

这平面束的坐标是（0，1，$-\varepsilon^r P$，λ），其中 λ 为参数，于是以 $u_2=1$，$u_3=-\varepsilon^r P$ 代入方程（3.50），则对一切 λ 必须满足，再经计算后，不难决定 ρ，结果是

$$\rho=-3\frac{\gamma}{P}\varepsilon^{2r}.$$

由此可见，三面体 δ_r 的坐标为$\left(0,\ 1,\ \varepsilon^r P,\ -3\frac{\gamma}{P},\ \varepsilon^{2r}\right)$，它们的方程是

$$x+\varepsilon^r Py-3\frac{\gamma}{P}\varepsilon^{2r}z=0\quad(r=0,\ 1,\ 2).$$

曲面 S 的切面 π：$z=0$ 关于三面体$\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}$的极线是 $x=0$，$y=0$，这就是曲面 S 的射影法线。　　证毕。

现在以 $\rho=-3\frac{\gamma}{P}\varepsilon^{2r}$ 代入方程（3.50），则除因子 $P\varepsilon^r u_2+u_3$ 外得到锥面 C_r 的方程：

$$
\begin{aligned}
&2u_4(\beta u_3^3-\gamma u_2^3)+6u_2u_3u_4\beta\varepsilon^r P(u_3-\varepsilon^r Pu_2)\\
&-\varphi\beta u_3[(u_3-4\varepsilon^r Pu_2)(u_3^2-\varepsilon^r Pu_2u_3+\varepsilon^{2r}P^2u_2^2)\\
&+9\varepsilon^r Pu_2u_3(u_3-\varepsilon^r Pu_2)]\\
&-\psi\beta u_2[(4u_3-\varepsilon^r Pu_2)(u_3^2-\varepsilon^r Pu_2u_3+\varepsilon^{2r}P^2u_2^2)\\
&+9\varepsilon^r Pu_2u_3(u_3-\varepsilon^r Pu_2)]\\
&+6\left[-\frac{\varepsilon^{2r}\gamma^2}{P}u_2^4+\varepsilon^r P\beta^2u_3(u_3^2+\varepsilon^r P^2u_2^2)(u_3-\varepsilon^r Pu_2)\right.\\
&\left.+\frac{\beta\gamma}{P}\varepsilon^{2r}u_2u_3(u_3^2-\varepsilon^r Pu_2u_3+\varepsilon^{2r}P^2u_2^2)\right]=0.
\end{aligned}
$$

其次要决定 C_r 的切面，使其通过 Segre 切线 S_r。为此，只要以 $u_2=1$，$u_3=-\varepsilon^r P$ 代入这方程来决定 u_4 则可，结果是

$$u_4=\frac{3}{8}\psi-\frac{3}{8}\varphi P\varepsilon^r;$$

所以通过 S_r 引锥面 C_r 的切面的方程可写成

$$\left(x+\frac{3}{8}\psi z\right)-\varepsilon^r P\left(y+\frac{3}{8}\varphi z\right)=0\quad(r=0,\ 1,\ 2),$$

这三个平面会于定直线

$$x+\frac{3}{8}\psi z=0,\quad y+\frac{3}{8}\varphi z=0.$$

这也是一条新的规范直线 $l_1\left(\frac{3}{8}\right)$，故得

定理4.28 通过 Segre 切线 S_r 引定理4.27中锥面 C_r 的三个切面交于一条规范直线 $l_1\left(\frac{3}{8}\right)$。

这条规范直线还有另一作图法，就是

定理4.29 设第二 Green 棱 $l_2\left(\frac{1}{4}\right)$ 和第二 Wilczynski 准线 $l_2\left(\frac{1}{2}\right)$ 与二渐近切线分别交于点 E_1，E_2 和 D_1，D_2，直线 D_1E_2 与 D_2E_1 的交点记作 F，引 F 与规范点 $(0,\ -\psi,\ \varphi,0)$ 的连线就是第二规范直线 $l_2\left(\frac{3}{8}\right)$。

证　第二 Green 棱的方程是

$$\frac{\varphi}{4}x+\frac{\psi}{4}y+1=0,\quad z=0;$$

第二Wilczynski 准线的方程是

$$\frac{\varphi}{2}x+\frac{\psi}{2}y+1=0, \quad z=0,$$

故与 A_r 的交点

$$D_1 \equiv \left(0, \ -\frac{4}{\psi}\right), \ D_2 \equiv \left(-\frac{4}{\varphi}, \ 0\right),$$

$$E_1 \equiv \left(0, \ -\frac{2}{\psi}\right), \ E_2 \equiv \left(-\frac{2}{\varphi}, \ 0\right);$$

直线 E_1D_2 与 E_2D_1 的方程分别是

$$\varphi x+2\psi y+4=0, \quad 与 2\varphi x+\psi y+4=0.$$

这两条直线的交点 F 的坐标为 $\left(-\frac{4}{3\varphi}, \ -\frac{4}{3\psi}\right)$，点 F 与规范点 $C(0, \ \psi, \ \varphi, \ 0)$ 的连线 CF 的方程是

$$8x_1+3\varphi x_2+3\psi x_3=0,$$

或即

$$\frac{3}{8}\varphi x+\frac{3}{8}\psi y+1=0.$$

这就是第二规范直线 $l_2\left(\frac{3}{8}\right)$。

上面所得到的结果都是从引用 C_6 导出来的，下面将引用锥面 C_4 得出下列诸定理。

定理4.30 通过每条渐近切线 A_r 可引一个平面 α'_r 使它自己属于它关于锥面 C_4 的第一配极，则二平面 α'_1，α'_2 交于第一Wilczynski 准线。

事实上，平面 α'_1 与 α'_2 分别重合于定理4.23中平面 α_2 与 α_1。

证 通过 A_1 的平面 $(0, \ 0, 1, \rho)$ 关于锥面 C_4 的第一配极是

$$O\cdot\frac{\partial C_4}{\partial u_2}+1\cdot\frac{\partial C_4}{\partial u_3}+\rho\frac{\partial C_4}{\partial u_4}=0, \ u_1=0,$$

使这个平面属于这配极的条件是

$$\left[O\cdot\frac{\partial C_4}{\partial u_2}+1\cdot\frac{\partial C_4}{\partial u_3}+\rho\frac{2C_4}{\partial u_4}\right]_{0,1,\rho}=0, \ u_1=0.$$

引用关于齐次函数的 Euler 定理，这个关系等价于

$$C_4(0,\ 1,\ \rho)=0.$$

以 $u_2=0$，$u_3=1$，$u_4=\rho$ 代入方程（3.47），就可决定 $\rho=\frac{\varphi}{2}$，于是平面 α_1' 的方程是

$$y+\frac{\varphi}{2}z=0.$$

同理，α_2'的方程是

$$x+\frac{\psi}{2}z=0.$$

证毕。

定理4.31 通过渐近切线 A_r 可引一平面 β_r 使它关于 C_4 的第一配极分解为两个平面束，而其中一个束的轴是另一条渐近切线 $A_s(s\neq r)$，则平面 β_1，β_2 交于一条规范直线 $l_1(1)$。

证 从方程（3.47）可以求出通过 A_1 的平面（0，0，1，ρ）关于锥面 C_4 的第一配极：

$$6\beta u_4u_3^2-\varphi(4\beta u_3^3-2\gamma u_2^3)-6\beta\psi u_2u_3^2+$$
$$+2\rho(\beta u_3^3-\gamma u_2^3)=0,\ u_1=0. \tag{3.51}$$

以通过 A_2 的平面的坐标（0，1，0，λ）代入上式，得 $\rho=\varphi$，所以平面 β_1 的方程是

$$y+\varphi z=0,$$

同理，平面 β_2 的方程是

$$x+\psi z=0.$$

事实上，以 $\rho=\varphi$ 代入方程（3.51）就得到平面 β_1 的第一配极分解为两个平面束的方程：

$$u_3^2(6u_4-2\varphi u_3-6\psi u_2)=0.$$

其中 $u_3^2=0$ 表示以渐近切线 A_2 为轴的一个平面束，另一个平面束记作 F_1，它的方程是

$$3u_4-\varphi u_3-3\psi u_2=0. \tag{3.52}$$

同理得出平面束 F_2 的方程：

$$3u_4-3\varphi u_3-\psi u_2=0. \tag{3.53}$$

从此导出

定理4.32 设以a_r表示平面束F_r的轴，则以a_1，A_1所决定的平面与以a_2，A_2所决定的平面必交于第一Čech轴$l_1\left(\frac{1}{3}\right)$。

证 以$u_2=0$代入方程（3.22）就得到a_1，A_1所决定的平面的方程

$$y+\frac{1}{3}\varphi z=0.$$

同理，以$u_3=0$代入方程（3.23）就得到a_2，A_2所决定的平面

$$x+\frac{1}{3}\psi z=0.$$

证毕。

定理4.33 定理4.31中平面β_r关于C_4的第二配极必分解为二平面束，其中一个束的轴就是渐近切线$A_s(s\neq r)$，另一条轴和A_r所决定的平面记作η_r，则二平面η_1，η_2的交线是曲面的射影法线。

证 平面$\beta_1(0, 0, 1, \varphi)$关于锥面$C_4$的第二配极为

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_3}+\varphi\frac{\partial}{\partial u_4}\right)^2 C_4=0, \quad u_1=0.$$

由方程（3.47），得

$$u_3(u_4-\psi u_2)=0, \quad u_4=0.$$

这表示两个平面束，其中一个以渐近切线A_2为轴，另一个平面束的方程可化为

$$u_2(x+\psi z)+u_3 y=0,$$

在这个束中决定一平面，使其通过渐近切线A_1：$y=0$，$z=0$，于是$u_2=0$；因之所求的平面η_1的方程是$y=0$；同理，平面η_2的方程是$x=0$，所以二平面η_1与η_2交于曲面的射影法线。

证毕。

定理4.34 通过渐近切线A_r引所有的平面，且对于每个平面做关于C_4的第一配极，则此等配极有三个公共切面分别通过

Darboux切线D_0, D_1, D_2，这三个平面会于同一直线a_r，以T'''表示由a_1, a_2决定的平面与切面π的交线，则直线T''关于直线a_1, a_2的调和共轭直线是一条规范直线$l_1\left(\frac{2}{3}\right)$。

证　因通过渐近切线A_1的任一平面$(0, 0, 1, \rho)$的第一配极是

$$\frac{\partial C_4}{\partial u_3}+\rho\frac{\partial C_4}{\partial u_4}=0,$$

所以它们的公共切面的坐标必须同时满足方程

$$\frac{\partial C_4}{\partial u_3}=0, \quad \frac{\partial C_4}{\partial u_4}=0.$$

从C_4的方程(3.47)，再经过简单的计算，这二方程可化为

$$\beta u_3^3-\gamma u_2^3=0,$$

$$3u_4-\varphi u_3-3\psi u_2=0.$$

令$u_2=1, u_3=\varepsilon^r P$，则$u_4=\psi+\frac{\varphi}{3}\varepsilon^r P$，于是公共切面的方程可写为

$$x+\psi z+\varepsilon^r P\left(y+\frac{\varphi}{3}z\right)=0 \quad (r=0, 1, 2).$$

由此可见，这三个平面会于同一直线a_1：

$$x+\varphi z=0, \quad y+\frac{\varphi}{3}z=0.$$

按同法可求得直线a_1的方程：

$$y+\varphi z=0, \quad x+\frac{\psi}{3}z=0.$$

直线a_1与a_2的方程可化为如下的形式：

$$x:y:z=-\psi:-\frac{\varphi}{3}:1$$

与

$$x:y:z=-\frac{\psi}{3}:\varphi:1.$$

把这两式相加以2除之，即得直线T''，关于直线a_1, a_2的调和共轭直线：

$$x:y:z=-\frac{2}{3}\psi:-\frac{2}{3}\varphi:1,$$

这就是规范直线 $l_1\left(\frac{2}{3}\right)$。　　　　　　　　　　　　证毕.

（6）Darboux曲线与Segre曲线　我们已经讲过，Darboux切线与Segre切线关于点的非齐次坐标（x，y，z）的方程分别写为

$$\beta x^3+\gamma y^3=0,\quad z=0 \tag{3.54}$$

与

$$\beta x^3-\gamma y^3=0,\quad z=0. \tag{3.55}$$

若一曲面曲线上各点的切线都是Darboux切线，则称它为Darboux曲线。

另一方面，已知Darboux二次曲面束（3.37）′的曲面与曲面S的交线在O点的三条切线与Darboux切线重合。

由（3.54）可知，Darboux曲线的微分方程是

$$\beta du^3+\gamma du^3=0. \tag{3.56}$$

由（3.54）和（3.55）可以看出Segre切线与Darboux切线是互为共轭的。若一曲面曲线上各点的切线都是Segre切线，则称它为Segre曲线。它的微分方程是

$$\beta du^3-\gamma dv^3=0. \tag{3.57}$$

现在要证明

定理4.35　通过曲面S上一点O的三条Segre曲线的三个密切平面会于第一Čech[1]轴$l_1\left(\frac{1}{3}\right)$。

证　令

$$\lambda=\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}},$$

则对任意一条Segre曲线，有

$$\frac{dv}{du}=\varepsilon\lambda\qquad(\varepsilon^3=1,\quad \varepsilon\neq 1),$$

$$\frac{d^2v}{du^2}=\varepsilon\lambda_u+\varepsilon^2\lambda\lambda_v,$$

因而，在O点的密切平面是决定于下列三点：

$$x,\ x_u+\varepsilon\lambda x_v,$$

$$x_{uu}+2\varepsilon\lambda x_{uv}+\varepsilon^2\lambda^2 x_{vv}+x_v(\varepsilon\lambda_u+\varepsilon^2\lambda\lambda_v).$$

利用基本方程（3.5），最后一点可改写为如下的形式：

$$(\theta_u+\varepsilon^2\lambda^2\gamma)x_u+\{\beta+\varepsilon\lambda_u+\varepsilon^2(\lambda\lambda_v+\lambda^2\theta_v)\}x_v+2\varepsilon\lambda x_{uv}+(*)x,$$

所以密切平面的方程是

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & \varepsilon\lambda & 0 \\ \theta_u+\varepsilon^2\lambda^2\gamma & \beta+\varepsilon\lambda_u+\varepsilon^2(\lambda\lambda_v+\lambda^2\theta_v) & 2\varepsilon\lambda \end{vmatrix}=0,$$

或即

$$y-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}-\theta_u\right)z-\varepsilon\lambda\left\{x+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}+\theta_v\right)z\right\}=0.$$

由此可见，对任意的ε（$\varepsilon^3=1$），这些平面通过同一直线：

$$x+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_v}{\lambda}+\theta_v\right)z=0,$$

$$y-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}-\theta_u\right)z=0.$$

所以上述三个密切平面交于这条直线。

若取x为Fubini法坐标，则$\theta=\ln(\beta\gamma)$；这时上面的方程组变为

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{\partial}{\partial v}\ln(\beta^2\gamma)\right\}z=0, \\ y+\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{\partial}{\partial u}\ln(\beta\gamma^2)\right\}z=0, \end{cases} \tag{3.58}$$

或由（3.8）可知，这就是规范直线$l_1\left(\frac{1}{3}\right)$：

$$x+\frac{1}{3}\psi z=0,\qquad y+\frac{1}{3}\varphi z=0, \tag{3.59}$$

就是Čech的**第一轴线**，并称其共轭直线$l_2\left(\frac{1}{3}\right)$为**第二轴线**。

关于三条Darboux曲线就没有象定理 4.35 的类似的定理。

但是可以证明

定理4.36 通过曲面S上一点O的任意两条Darboux曲线与共轭于第三条Darboux曲线的Segre曲线，在O的三个密切平面会于同一直线。（见Bompiani〔10〕。）

证明留给读者作为习题。

（7）Moutard[1]的二次曲面．设S是一非直纹面，t是S在P点具方向λ的切线（非渐近切线），则通过t的任意平面与S的平截线在P的密切二次曲线的轨迹是一个二次曲面．通称为曲面S在一点P的切线t或方向λ的Moutard的二次曲面．

定理4.37 微分方程（3.5）的一个积分曲面S在一点P的一个方向λ的Moutard的二次曲面的局部方程是

$$x_2x_3+x_4[-x_1+k_2x_2+k_3x_3+k_4x_4]=0, \tag{3.60}$$

式中

$$\begin{cases} k_2=\dfrac{1}{3\lambda}(\gamma\lambda^3-2\beta), \\ k_3=-\dfrac{1}{3\lambda^2}(2\gamma\lambda^3-\beta), \\ k_4=\dfrac{1}{36\lambda^3}[3\lambda(\beta\varphi-4\beta\psi\lambda-6\theta_{uv}\lambda^2-4\gamma\varphi\lambda^3 \\ \qquad +\gamma\psi\lambda^4-4(\beta+\gamma\lambda^3)^2]. \end{cases} \tag{3.61}$$

为了计算Moutard二次曲面的方程，我们应用曲面的方程（3.7）。曲面S在点$P(0,0,0)$沿方向λ的切线关于非齐次局部坐标的方程是

$$y-\lambda x=0,\ z=0\ (\lambda\neq 0\text{的有限常数}). \tag{3.62}$$

通过这条切线的任意平面（切平面除外）的方程是

$$y-\lambda x=nz, \tag{3.63}$$

式中n是一个参数．不妨设$n\neq 0$，这不影响最后结果的一般性．把曲面S与平面（3.63）的平截线C从点$(0,0,0,1)$射影到切面上，C的射影曲线C'的方程是$z=0$与

$$\frac{1}{n}(y-\lambda x)=xy-\frac{1}{3}(\beta x^3+\gamma y^3)+\frac{1}{12}(\beta\varphi x^4-4\beta\psi x^3y \\ -6\theta_{uv}x^2y^2-4\gamma\varphi xy^3+\gamma\psi y^4)+\cdots. \tag{3.64}$$

从这个方程把y以x的幂级数展开，结果是

$$y=\lambda x+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\cdots,$$

式中

$$\begin{cases} B=n\lambda, \\ C=n\left(n\lambda-\frac{1}{3}\beta-\frac{1}{3}\gamma\lambda^3\right), \\ D=n\left[n\left(n\lambda-\frac{1}{3}\beta-\frac{4}{3}\gamma\lambda^3+\frac{1}{12}(\beta\varphi\right.\right. \\ \qquad \left.\left.-4\beta\psi\lambda)-6\theta_{uv}\lambda^2-4\gamma\varphi\lambda^3+\gamma\psi\lambda^4\right)\right]. \end{cases} \tag{3.65}$$

曲线C'在P（0，0，0）的密切二次曲线的方程是$z=0$与

$$y-\lambda x-Bx^2-\frac{C}{B}x(y-\lambda x)+\frac{C^2-BD}{B^3}(y-\lambda x)^2=0. \tag{3.66}$$

这个方程和方程（3.63）表示曲线C在P点的密切二次曲线。为了寻找当n变动时，这条二次曲线的轨迹的方程，只要以(3.65)所给出的B，C，D代入（3.66)，然后从此与（3.63）消去n就可以得到关于非齐次坐标的一个方程，再改写为齐次坐标就变成方程（3.60)。

苏步青与市田朝次郎[28]获得如下的结果：

若一二次曲面与曲面S在P点构成二阶接触，并若二次曲面与S的交线在P点的切线有两条沿方向λ重合，第三条切线沿方向μ，则二次曲面的方程是方程（3.60)，其中k_2，k_3由(3.61)的前两个方程给定，但k_3是任意的。此外，λ，μ满足关系式

$$\gamma\lambda^2\mu+\beta=0, \tag{3.67}$$

并且二次曲面属于一个所谓Moutard**二次曲面束**，它是由属于在P点沿方向λ的一个Moutard二次曲面与曲面S在P的切面（算作两个重在一起）所决定的。对于每个方向λ有一个方向μ，但是对于每个方向μ有两个共轭方向λ。若一个方向μ是一个方向λ的共轭（$\mu=-\lambda$)，则λ是一个Segre方向；若一个方向μ是一个方向λ（$\mu=\lambda$)，则λ是一个Darboux方向。

利用Moutard束还可定义下面的一个对应：

（8）Moutard对应。在P的切面上任取一点$R(\neq P)$，作属于切线PR的Moutard束与R关于这个束的任意极面π，则称点R与平面π之间的对应为Moutard对应。设(η_1, η_2, η_3)是点(y_1, y_2, y_3)的对应平面，则Moutard对应是：

$$\begin{cases} \rho\eta_1 = y_1y_2y_3 + \dfrac{1}{3}(\beta y_2^3 + \gamma y_3^3), \\ \rho\eta_2 = y_2^2y_3, \qquad\qquad (\rho \neq 0) \\ \rho\eta_3 = y_2y_3^2, \end{cases} \tag{3.68}$$

或

$$\begin{cases} ry_1 = \eta_1\eta_2\eta_3 - \dfrac{1}{3}(\beta\eta_2^3 + \gamma\eta_3^3), \\ ry_2 = \eta_2^2\eta_3, \qquad\qquad (r \neq 0) \\ ry_3 = \eta_2\eta_3^2. \end{cases} \tag{3.68$'$}$$

张素诚[10]研究过与Moutard束有关的一些情况（详细论述见苏步青〔I〕，80—83页）：

考察曲线S在P点的Darboux二次曲面与属于t的Moutard二次曲面。这两个二次曲面交于两条渐近切线与另一条二次曲线。这二次曲线所在的平面π的包络而成的锥面，与Darboux二次曲面的指数h有关，记作$K(h)\left(h \neq -\dfrac{1}{3}\right)$。对不同值$h$，$z=0$关于$K(h)$有共同的第三配极。

此外，还有：在曲面上一点属于所有不同切线t的Moutard二次曲面包络成一个曲面。若t不是Darboux切线，则属于t的Moutard二次曲面与包络面沿一条二次曲线相切，并且这二次曲线所在的平面，就是通过曲面上所考虑点且有方向t的泛测地线的密切平面。

白正国[1]也研究过Moutard二次曲面，获得了一些有趣的结果，兹述之如下：

1° 一个Moutard二次曲面Q_λ上的剩余密切二次曲线问题。当Q_λ上的一条密切二次曲线通过P，并又是Q_λ与在P的另一个

Moutard二次曲面$Q_{\bar{\lambda}}$的交线时，称为Q_{λ}的剩余密切二次曲线。

定理4.38 设t_{λ}是一条非渐近、非Darboux切线，则在属于t_{λ}的Moutard二次曲面上有一条并且只有一条剩余密切二次曲线。当且只当t_{λ}是一条Segre切线时，对应的切线$t_{\bar{\lambda}}$和t_{λ}是共轭的，这里$t_{\bar{\lambda}}$是$Q_{\bar{\lambda}}$所属的切线。属于共轭切线t_{λ}和$t_{-\lambda}$的两个Moutard二次曲面Q_{λ}与$Q_{-\lambda}$具有同一条在O的切线$t_{\bar{\lambda}}$的剩余密切二次曲线，属于每条Darboux切线的Moutard二次曲面是没有任何剩余二次曲线的。

属于每条Segre切线的Moutard二次曲面上各有剩余密切二次曲线，它们所在的三个平面构成一个三面体，并且切面关于这个三面体的极线是第一准线 $l_1\left(-\frac{1}{2}\right)$。

2° Moutard束的特征问题。

定理4.39 属于一条非Darboux切线的Moutard束中一个非Moutard二次曲面上，有一条而且只有一条曲面的密切二次曲线。反之，过曲面上一点的两条渐近曲线与曲面的唯一一条密切二次曲线的任一二次曲面必属于在同一点的Moutard束。对每条Darboux切线所对应的Moutard束中任何非Moutard二次曲面，不含有曲面的任何密切二次曲线。

3° 新协变二次曲面的存在问题。

定理4.40 设S不是一致曲面，在S上一点P必有这样的三条密切二次曲线C_1, C_2, C_3，使过其每条可作三个Moutard二次曲面。这些二次曲线C_1, C_2, C_3在同一二次曲面Q上，并且Q通过P的两条渐近切线，并与S在P构成二阶接触。

这个新协变二次曲面Q还具有其他一些性质，这里从略。（上列诸定理的证明见苏步青〔Ⅱ〕，83—88页。）

（8）Čech变换。对于曲面S上一点P的切面上一点（y_1, y_2, y_3）取通过P的一平面（η_1, η_2, η_3）与它对应，使得

$$\begin{cases} \rho\eta_1 = y_1y_2y_3 + k(\beta y_2^3 + \gamma y_3^3), \\ \rho\eta_2 = y_2^2y_3, \qquad\qquad (k\text{：常数}) \\ \rho\eta_3 = y_2y_3^2, \end{cases} \qquad (3.69)$$

这个对应称为Čech[1]变换，记作Σ_k。

当$k=0$时，对应变为

$$\eta_1:\eta_2:\eta_3=y_1:y_2:y_3,$$

就是Lie配极。

当$k=\frac{1}{3}$时，就是Moutard对应（3.68）。

当$k=-1$时，称为Segre对应。

关于Σ_k的详细讨论见苏步青〔Ⅱ〕，99-104页。

（10）Kubota锥面与有关的一些构图．在非直纹曲面S上一点P任引一条非渐近切线t_λ，C表示过t_λ的平面与曲面的截线。Kubota首先证明了C在P的射影法线的轨迹是三次代数锥面（Kubota und B.Su[22]），称之为属于t_λ的Kubota锥面。苏步青[21]还用另法导出这个锥面的方程，并对这锥面与Segre锥面之间的关系作出了重要补充。兹将他所获得的几个结果介绍如下：

1° 当且只当t_λ是一Darboux切线时，属于t_λ的Kubota锥面与曲面相切。

2° 属于切线t_λ的Kubota锥面沿t_λ一般有两个不同的切面；当t_λ绕P变动时，曲面的切面关于这两切面的调和共轭平面包络Segre锥面，并且这两切面自身都包络同一个九阶代数锥面。

3° 通过曲面S在P点的切线t_λ存在这样两平面，使曲面由各平面截取的平截线与密切二次曲线超阶密切。并且这两平面就是属于t_λ的Kubota锥面沿t_λ的两个切面（见L.P.Lane〔3〕）。

（11）Demoulin四面体．当曲面S上一点$P(x)$在S上变动时，则有∞^2个Lie的二次曲面。现在来研究这些曲面的包络。为此，我们有必要先来导出局部坐标的微分公式。

我们考虑方程（3.5）的一个积分曲面S，在S上一点x，和一点X，它的坐标参考于一个固定一般坐标系取形式

$$X=x_1x+x_2x_u+x_3x_v+x_4x_{uv}. \tag{3.70}$$

我们假定，当点x在曲面S上变动时，点X关于一般坐标系是固定的，并设坐标X的比例因子已经选定使得这些坐标关于变数u，

v是常数。因而$X_u=0$和$X_v=0$。计算导数X_u, X_v，并把它们以x, x_u, x_v, x_{uv}的线性组合来表达，然后让这些等于零。而且利用点x, x_u, x_v, x_{uv}的线性无关性，便得

定理4.41 若由表达式（3.70）给定的一点X，当u, v变动时，是固定的，并若对坐标X选定这样的比例因子使得坐标X是常数，则点X的局部坐标必须满足下列条件：

$$\begin{cases} x_{1u}=-px_2-(p_v+\beta q)x_4, \\ x_{2u}=-x_1-\theta_u x_2-(\beta\gamma+\theta_{uv})x_4, \\ x_{3u}=-\beta x_2-\pi x_4, \\ x_{4u}=-x_3-\theta_u x_4; \\ x_{1v}=-qx_3-(q_u+\gamma p)x_4, \\ x_{2v}=-\gamma x_3-\chi x_4, \\ x_{3v}=-x_1-\theta_v x_3-(\beta\gamma+\theta_{uv})x_4, \\ x_{4v}=-x_2-\theta_v x_4. \end{cases} \tag{3.71}$$

式中

$$\begin{cases} \pi=p+\beta\psi, \quad \psi=(\ln\beta^2\gamma)_v, \\ \chi=q+\gamma\varphi, \quad \varphi=(\ln\beta\gamma^2)_u. \end{cases} \tag{3.72}$$

条件（3.71），当u, v变动时，不但使点X是固定和常数坐标的必要条件，而且也是充分条件。

现在回到∞^2个Lie二次曲面的包络问题。空间中∞^2个二个曲面的包络一般有八个；因为三个二次曲面有八个交点。自然，曲面S是包络的一部分，即有四个重合于S，以及Lie的二次曲面与它的包络一般还切于除P外的另四点。这四点所成的四面体称为曲面S在P点的Demoulin四面体。当P在曲面S上变动时，则称这四点的轨迹为曲面S的Demoulin变换，简称为D变换。

上面已经求出Lie的二次曲面的方程是（3.37）中$h=0$：

$$x_2x_3-x_1x_4-\frac{1}{2}(\beta\gamma+\theta_{uv})x_4^2=0. \tag{3.73}$$

把这个方程分别关于u和v求偏导数，然后应用微分公式(3.71)；并若把所得到的两个方程利用方程（3.73）和可积条件来简化，

就有

$$
\begin{cases} x_2^2+\psi x_2x_4-Jx_4^2=0, \\ x_3^2+\varphi x_3x_4-Ix_4^2=0, \end{cases} \tag{3.74}
$$

式中已置

$$
\begin{cases} I=\frac{1}{2}(2p+\beta\psi-\varphi_u+\varphi\theta_u-\varphi^2), \\ J=\frac{1}{2}(2q+\gamma\varphi-\psi_v+\psi\theta_v-\psi^2). \end{cases} \tag{3.75}
$$

(3.74) 的两个方程分别表示一对平面，把它们写成因子形式：

$$
\begin{cases} (x_2-h_1x_4)(x_2-h_2x_4)=0, \\ (x_3-k_1x_4)(x_3-k_2x_4)=0. \end{cases} \tag{3.76}
$$

式中 h_1 和 h_2 是把方程 (3.74) 看作$\frac{x_2}{x_4}$的一个二次方程的两个根；对k_1和k_2也有类似的意义，(3.73) 和 (3.76) 看作$x_1:x_2:x_3:x_4$的联立方程，就可导出Lie的二次曲面与它的包络的切点的坐标，于是便有

定理4.42 当一点P在方程 (3.5) 的一个积分曲面S上变动时，则S在P的Lie二次曲面与它的包络，除P点外，还切于四点P_{ij}(一般是不同点)，它们的坐标是

$$
h_ik_j-\frac{1}{2}(\beta\gamma+\theta_{uv}),\ h_i,\ k_j,\ 1\quad(i,j=1,2). \tag{3.77}
$$

这四点P_{ij}是曲面S在P点的Demoulin四面体的顶点。

下面再介绍几个补充命题（证明从略）：

1° 在曲面S上一点P所对应的四条直线$P_{11}P_{12}$，$P_{12}P_{22}$，$P_{22}P_{21}$，$P_{21}P_{11}$是Lie二次曲面的母线，在这个二次曲面上构成一个空间四边形，有时也称为Demoulin**四边形**，两直线$P_{11}P_{12}$和$P_{22}P_{21}$与渐近v-切线（$x_2=0,x_4=0$）分别交于两点

$$
(h_i,\ 0,\ 1,\ 0)\qquad(i=1,2). \tag{3.78}
$$

两直线$P_{21}P_{11}$和$P_{12}P_{22}$与渐近u-切线（$x_3=0,x_4=0$）分别交于两点

$$(k_i, 0, 1, 0) \qquad (i=1, 2). \tag{3.79}$$

2° 两点 $(k_i, 1, 0, 0)$ 是渐近直纹面R_u在母线 u -切线上的弯结点；直线$P_{21}P_{11}$和$P_{12}P_{22}$分别是直纹面R_u在这两点的渐近切线(弯结点切线)。类似地两点$(h_i, 0, 1, 0)$是渐近直纹面 R_v 在母线 v -切线上的弯结点；直线$P_{11}P_{12}$和$P_{22}P_{21}$分别是 R_v在这两点的弯结点切线。

3° 两直线$P_{11}P_{22}$和$P_{12}P_{21}$是关于Lie二次曲面的一对共轭直线。当 $(h_1-h_2)(k_1-k_2)\neq 0$ 时，两平面$PP_{11}P_{22}$和$PP_{12}P_{21}$的方程是

$$\begin{cases} (k_1-k_2)x_2-(h_1-h_2)x_3+(h_1k_2-h_2k_1)x_4=0, \\ (k_2-k_1)x_2-(h_1-h_2)x_3+(h_1k_1-h_2k_2)x_4=0. \end{cases} \tag{3.80}$$

这两个平面的交线是第一Wilczynski准线$l_1\left(\frac{1}{2}\right)$。（见 Bompini〔10〕，55 页。）

4° 直线$P_{11}P_{12}$, $P_{22}P_{21}$, $P_{12}P_{22}$, $P_{21}P_{11}$在下面的二次曲面束的每个二次曲面上：

$$\begin{aligned} &x_1^2-Ix_2^2-Jx_3^2+\left(IJ-\frac{1}{4}\varkappa^2\right)x_4^2+\varphi x_1x_2+\psi x_1x_2 \\ &+(\varkappa+\varphi\psi)x_2x_3+\left(\frac{1}{2}\varphi\varkappa-I\psi\right)x_2x_4 \\ &+\left(\frac{1}{2}\psi\varkappa-J\varphi\right)x_3x_4+B\left(x_2x_3-x_1x_4-\frac{1}{2}\varkappa x_4^2\right)=0, \end{aligned} \tag{3.81}$$

式中$\varkappa=\beta\gamma+\theta_{uv}$, B是一个任意参数。

5° 在曲面上一点 x 的切面$x_4=0$与二次曲面束 (3.81) 的一个曲面交于一条二次曲线，它的方程是$x_4=0$和

$$x_1^2-Ix_2^2-Jx_3^2+\varphi x_1x_2+\psi x_1x_3+(B+\beta\gamma+\theta_{uv}+\varphi\psi)x_2x_3=0. \tag{3.82}$$

若取

$$B=-\frac{1}{2}\varphi\psi-\frac{1}{2}n-\beta\gamma-\theta_{uv}, \tag{3.83}$$

式中

$$n=\frac{FF_u}{\beta\gamma^2}\cdot\frac{GG_v}{\beta^2\gamma},\tag{3.84}$$

并且

$$F^2=\gamma^2(4I+\varphi^2),G^2=\beta^2(4J+\psi^2),\tag{3.84$'$}$$

则以K_2表示这条二次曲线，称为曲面在点x的相伴二次曲线。K_2在点（3.78）切于这些点的轨迹（当v变动时），并在点（3.79）切于这些点的轨迹（当u变动时）。

通过Demoulin四边形和相伴二次曲线K_2可决定唯一的二次曲面Q_1，称为相伴二次曲面，它的方程就是（3.81），其中B由（3.83）给定。

6° 点x关于K_2的极线是第二准线$l_2\left(\frac{1}{2}\right)$。从点$x$向$K_2$的切线方向决定于方程

$$(4I+\varphi^2)du^2+2ndudv+(4J+\psi^2)dv^2=0.\tag{3.85}$$

这个方程所定义的曲面曲线称为曲面的射影极小曲线（见苏步青〔24〕I）。

7° Thomsen[1]称

$$\delta\iint\beta\gamma dudv=0\tag{3.86}$$

的解为射影极小曲面。射影极小曲面要满足两个等价条件：

$$[\gamma^2(4I+\varphi^2)]_u=0,\ [\beta^2(4J+\psi^2)]_v=0.\tag{3.87}$$

8° 若曲面S的Lie二次曲面的包络具有除S外四个不同的曲面，并设四个包络面与曲面S的渐近曲线互相对应，则S是一个射影极小曲面一个等价的充要条件是曲面S上的射影极小曲线构成一个共轭网。

9° 点

$$(B+\varphi\psi,-\psi,-\varphi,2)\tag{3.88}$$

是切面$x_4=0$关于束（3.81）中任一二次曲面的极。这些极的轨迹是第一准线$l_1\left(\frac{1}{2}\right)$，并且点$x$关于二次曲面束的极面必通过

第二准线 $l_2\left(\frac{1}{2}\right)$（见苏步青〔24〕Ⅱ）。

若取

$$B=-\frac{1}{2}\varphi\psi-\beta\gamma-\theta_{uv}, \tag{3.89}$$

则点（3.88）在Wilczynski的二次曲面上。曲面 S 是一个射影极小曲面的一个充要条件是：这个 B 的值与（3.83）所给定的 B 的值相同。

10° 关于相伴二次曲面 Q_1 尚有下列几个重要定理：

Q_1 的包络，一般是曲面 S 的四个Demoulin变换与另外四个曲面。

1）若曲面 S 的相伴二次曲面 Q_1 是固定的，则 S 的渐近曲线都属于线丛，其逆也真。

2）若曲面 S 的渐近曲线都属于线丛，则在其各点的Demoulin四边形恒在固定二次曲面 Q_1 上，其逆也真。更一般地，还有

3）若曲面 S 的Lie二次曲面常与固定二次曲面切于四点，则 S 的渐近曲线必须属于线丛（见苏步青〔24〕）。

11° 一曲面的相伴二次曲面的一个推广（见白正国〔4〕）。考察通过曲面 S 上一点 M 的两条渐近曲线 u 和 v 的主密切线丛 R_1 和 R_2。设 C 是 S 上过 M 的曲线。在 M 和 C 上两邻点 M'，M'' 所引的三个主密线丛 R_1，R_1'，R_1'' 有公共的半二次曲面，称之为 C 在 M 的 u-半织面。同样可以定义 C 在 M 的 v-半织曲面。

特别，当 C 是 S 上一条渐近曲线 v 时，则 u-半织曲面所在的织曲面与这点的相伴二次曲面重合。

若一曲面的所有渐近曲线 v 都属于线丛，则每条曲线 v 的所有弯结点切线必在（仅与 u 有关）同一二次曲面上。其逆亦真。

12° 设 M 是曲面 S 的正常点，Γ 是 S 与在 M 的切面的交线，设 K_3 是以 M 为结点并与 Γ 的每支构成三阶接触的平面三次曲线，则 C 的三个变曲点所在的直线是第二Green棱 $l_2\left(\frac{1}{4}\right)$。（见Strazzeri〔1〕。）

2．一切渐近曲线属于线性丛的曲面（简称σ曲面） 在三十年代中期苏步青[24]对σ曲面作了一系列的研究工作，并且获得了不少的重要成果。这里只作概括性的介绍，详细的论述见苏步青〔24〕或〔Ⅰ〕。

（1）σ曲面的相伴二次曲面（见苏步青〔24〕Ⅰ）。上一段已经提过在曲面上一点（x）总可以决定相伴二次曲线K_2和相伴二次曲面Q_1，这些图形在σ曲面论中特别显得重要。即：若Q_1是固定的或K_2在固定二次曲面上，则曲面必是σ曲面，其逆也真。按照定义，Q_1是通过K_2与Demoulin四边形的一个二次曲面，于是σ曲面的四个Demoulin变换都在固定二次曲面Q_1上。因此，先从D变换开始进行σ曲面的论述。

设点（x）为原曲面的法坐标，我们知道，渐近直纹面R_u与R_v的弯结点切线在点（x）构成Demoulin四边形。因而它的顶点是Lie二次曲面的特征点，就是点（x）的D变换，记作$\bar{x}_{ik}$（$i，k=1，2$），从此可叙述下列定理：

1° 设$\bar{x}_{ik}$（$i，k=1，2$）是一曲面x的四个不同的D变换；若这些线汇$x\bar{x}$中任何三个的一对焦点关于x与$\bar{x}$是调和共轭的，则其余一个线汇也有同一性质，并且曲面x必为σ曲面；其逆也真。

2° 若曲面x的Demoulin四边形常在一个固定二次曲面上，则这个二次曲面一定是相伴二次曲面Q_1，并且曲面x是σ曲面，反之，一个σ曲面的Demoulin四边形常在固定二次曲面上，并且这个二次曲面就是相伴二次曲面Q_1。

3° 若取σ曲面的（固定）相伴二次曲面Q_1为非欧度量的绝对形，则在曲面的一系渐近曲线中一条上的各点所引的另一系渐近切线都与Q_1上同系的两条母线相交，从而这些渐近切线是Clifford平行线，并且曲面在各点的第一准线$l_1\left(\frac{1}{2}\right)$是它的非欧法线。

4° 决定Demoulin四边形常在一个固定的二次曲面Q_1上的

曲面，这个问题等价于另一问题：决定在以Q_1为绝对形的非欧度量下具有零曲率的曲面，且因而也是以Q_1为其D变换的σ曲面。

5° 一个σ曲面的D变换与其准线汇的任一焦曲面的D变换重合。

（2）σ曲面与射影极小曲面（见苏步青〔24〕Ⅱ）。先来叙述前段定理1°的一个推广。

1° 设一曲面x具有四个不同的D变换；若其中三个D变换在各点的二阶密切二次曲面都通过对应的弯结点（因而也通过弯结点切线），则其余一个D变换也有同一性质，并且x必为σ曲面。

2° 设一曲面x的D变换都是不同的，为了x变成等温渐近曲面F的充要条件是，四个弯结点曲面在对应的弯结点所引的四个切面共点。

3° 若在曲面x的各点常有这样一个二次曲面：它不但通过对应的Demoulin四边形，并且还在对应的弯结点与曲面相切，则x一定是σ曲面。

现在利用相伴二次曲面Q_1来导出射影极小曲面的特征。

4° 射影极小曲面的一个特征是：1）曲面的切面关于对应的相伴二次曲面Q_1的极常在对应的Lie二次曲面上；或者2）曲面的一点关于对应的相伴二次曲面Q_1的极面与Lie二次曲面相切。

（3）射影极小曲面．在前一段中，我们曾经利用相伴二次曲线与相伴二次曲面Q_1来叙述射影极小曲面的一些特征，现在利用D变换来阐明射影极小曲面的几个特征：

1° Thomsen[2]定理 除了σ曲面外，只有射影极小曲面具有下面的性质：由弯结点切线$y\bar{x}$，$z\bar{x}$所构成的两线汇的可展曲面都对应于共轭网。

2° 设σ曲面具有不同D变换$\bar{x}$，则σ是射影极小曲面的充要条件是：在四个曲面$\bar{x}$各与对应于原曲面x的同一系渐近曲线的有关曲线的切线，必须是确定的、不重合的，并在同一二次曲面上。

3° 如果一个射影极小曲面的任何D变换都不退缩，那末它们也都是射影极小曲面，并与原曲面的D变换一样，它们的D变换也具有相同的性质（实的、不同的、重合的）。

现在从$\bar{\bar{x}}$表示曲面$\bar{x}$的D变换，并称为原曲面x的第二D变换。

4° 对D变换不是不定的射影极小曲面的变换D是对称（对合）的。

这个定理表明射影极小曲面的变换D是可逆(对合)的。现在要问是否还有其他曲面具有这个性质，这由下面的定理来回答：

5° O. Môêl 定理 沿两个方向都具有可逆的、确定的变换D的唯一种曲面是射影极小曲面。

关于射影极小曲面还有许多特征，这里从略，详细内容参照苏步青〔I〕第三章。

3. 高维空间中的共轭网 在n维射影空间P^n中一曲面上给定一个曲线网，假定在其中一系的每条固定曲线上各点作另一系各曲线的切线构成一个可展曲面，则称这个网为曲面的一个共轭网。现在来证明下面的定理：

一曲面$z=z(u, v)$具有共轭网(u, v)的一个充要条件是曲面上一动点z满足取如下形式的一个Laplace方程：

(E) $$z_{uv}+az_u+bz_v+cz=0.$$

证 在曲面上任意一点z的u切线上任意一点y（除z外）由公式

$$y=z_u+\alpha z \tag{3.90}$$

给出，其中$\alpha=\alpha(u, v)$。把(3.90)关于v求导，得

$$y_v=z_{uv}+\alpha z_v+\alpha_v z. \tag{3.91}$$

当v变动时，点y或者是固定的，或画一条曲线，它在y的切线由y和y_v决定。为了证明条件的必要性，让我们假定参数网是共轭的。那末，若当v变动时y是固定的，则存在导数y_v与y成比例，从而是z和z_u的一个线性组合。另一方面，若当v变动时y不是固定点，则由共轭性的假设，则点y必画一条曲线，它在y的切线是直线zz_u，则不仅点y，而且还有点y_v是z和z_u的一个线

性组合. 不论在哪个情形，总有u，v的函数α和p，q使得

$$z_{uv}+\alpha z_v+\alpha_v z=pz+qz_u. \tag{3.92}$$

这表明，坐标z满足Laplace型的方程，于是证明了必要性。为了证明充分性，假定坐标z满足方程(E)。从（E）和(3.91)消去二阶导数z_{uv}，给出

$$y_v+az_u+(b-\alpha)z_v+(c-\alpha_v)z=0.$$

令$\alpha=b$，我们看到点y_v变为z和z_u的一个线性组合，所以，当这条直线沿v曲线画一可展曲面，则由

$$y=z_u+bz \tag{3.93}$$

给出的点y是u切线上一个焦点，所以参数网是一个共轭网，定理证毕。

对于一个Laplace方程（E）就有两个不变量，通称为Darboux-Laplace**不变量**：

$$h=a_u+ab-c, \tag{3.94$_1$}$$

$$k=b_v+ab-c. \tag{3.94$_2$}$$

设z_1是z沿v方向的Laplace变换：

$$z_1=z_v+az,$$

则z_1也满足一个Laplace方程

$$(E_1)\quad (z_1)_{uv}+a(z_1)_u+b_1(z_1)_v+c_1z_1=0,$$

式中

$$a_1=a-(\ln h)_v,\quad b_1=b,\quad c_1=c-a_u+b_v-b(\ln h)_v,$$

因此，对应的两个不变量是

$$h_1=2h-k-(\ln h)_{uv},$$

$$k_1=h. \tag{3.95}$$

设z_{-1}是z沿u方向的Laplace变换

$$z_{-1}=z_u+bz,$$

就可得到z_{-1}的Laplace方程

$$(E_{-1})\quad (z_{-1})_{uv}+a_{-1}(z_{-1})_u+b_{-1}(z_{-1})_v+c_{-1}z_{-1}=0,$$

式中

$$a_{-1}=a,\quad b_{-1}=b-(\ln k)_u,\quad c_{-1}=c-b_v+a_u-a(\ln k)_u.$$

因此，它的两个不变量是

$$h_{-1}=k,$$
$$k_{-1}=2k-h-(\ln k)_{uv}. \tag{3.96}$$

按照上列方法到一系列方程：

$$\cdots,\ (E_{-n}),\cdots,(E_{-1}),(E),(E_1),\cdots,(E_n),\cdots,$$

从（3.95）与（3.96）不难导出方程（E_i）的两个不变量 h_i，k_i 之间的关系：

$$h_i=k_{i+1},\quad k_i=2k_{i+1}-h_{i+1}-(\ln k_{i+1})_{uv}. \tag{3.97}$$

这里的指标 i 可取正负整数与 0，所以由（3.97）可逐次找出h_i，k_i，因而便得

$$h_{i+1}=h_i+h-k-(\ln(hh_1\cdots h_i))_{uv}. \tag{3.98}$$

应当指出，关于高维射影空间共轭网的理论，苏步青教授从1959起到1966前作了深入系统的研究，获得了不少重要成果。这些成果基本上都已总结在他的一本专著里（见苏步青〔Ⅱ〕）。由于篇幅所限，本书不能介绍。

4. Cartan规范标架 第一Wilczynski 准线 $l_1\left(\frac{1}{2}\right)$与 Lie 二次曲面的交点除曲面 S 上的点 $M(x)$ 外记作 M_3。第二准线 $l_2\left(\frac{1}{2}\right)$与 Lie 二次曲面也有两个交点，就是 $l_2\left(\frac{1}{2}\right)$与两渐近切线的交点，记作$M_1, M_2$，则以$M$，$M_1$，$M_2$，$M_3$为顶点的活动标架内接于在$M$的 Lie 的二次曲面，并且它的两个面（$M$，$M_1$，$M_2$）和（$M_1, M_2, M_3$）分别是 Lie 二次曲面在$M$和$M_3$的切面。这个射影协变四面体通称为 Cartan 规范标架。

如果适当地选取比例因子，我们可以令（见苏步青〔Ⅱ〕，22—26页）

$$M=e^{-\frac{1}{2}\theta}x,$$
$$M_1=e^{-\frac{1}{2}\theta}\left\{x_u-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_u}{\gamma}+\theta_u\right)x\right\},$$
$$M_2=e^{-\frac{1}{2}\theta}\left\{x_v-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_v}{\beta}+\theta_v\right)x\right\},$$

$$M_3=e^{-\frac{1}{2}\theta}\left[x_{uv}-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_v}{\beta}+\theta_v\right)x_u-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_u}{\gamma}+\theta_u\right)x_v\right.$$
$$\left.+\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\beta_u}{\beta}+\theta_v\right)\cdot\left(\frac{\gamma_u}{\gamma}+\theta_u\right)-\frac{1}{2}(\theta_{uv}+\beta\gamma)x\right\}\right].$$

然后应用基本方程（3.5）获得如下的基本方程（见苏步青〔24〕，Ⅳ）：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial M}{\partial u}=\frac{1}{2}(\ln\gamma)_u M+M_1,\\
&\frac{\partial M_1}{\partial u}=-B^2M-\frac{1}{2}(\ln\gamma)_u M_1+\beta M_2,\\
&\frac{\partial M_2}{\partial u}=KM+\frac{1}{2}(\ln\gamma)_u M_2+M_3,\\
&\frac{\partial M_3}{\partial u}=A^2\beta M+KM_1+B^2M_2-\frac{1}{2}(\ln\gamma)_u M_3;\\
&\frac{\partial M}{\partial v}=\frac{1}{2}(\ln\beta)_v M+M_2,\\
&\frac{\partial M_1}{\partial v}=\overline{K}M+\frac{1}{2}(\ln\beta)_v M_1+M_3,\\
&\frac{\partial M_2}{\partial v}=A^2M+\gamma M_1-\frac{1}{2}(\ln\beta)_v+M_2,\\
&\frac{\partial M_3}{\partial v}=B^2\gamma M+A^2M_1+\overline{K}M_2-\frac{1}{2}(\ln\beta)_v M_3.
\end{aligned}\tag{3.99}$$

式中

$$2K=\beta\gamma-(\ln\beta)_{uv},\quad 2\overline{K}=\beta\gamma-(\ln\gamma)_{uv}.\tag{3.100}$$

取这样的顶点M，M_1，M_2，M_3的四面体做参考坐标系，则可把Lie二次曲面的局部方程（3.73）简化为如下的形式：

$$Q\equiv y_1y_4-y_2y_3=0.$$

这里（y_1，y_2，y_3，y_4）是任意点关于$\{M, M_1, M_2, M_3\}$的局部坐标。

一般地，Darboux二次曲面束（3.37）关于局部坐标系（y_1，y_2，y_3，y_4）的方程是

$$y_1y_4-y_2y_3-\frac{1}{2}h\beta\gamma y_4^2=0,\tag{3.101}$$

式中 h 表示参数。

5．Godeaux二次曲面序列．三维射影空间 P^3 的直线可以表示到五维射影空间 P^5 中超二次曲面 Ω 上一点，称 Ω 为 Klein 的超二次曲面，设 MM_1，MM_2 是曲面 S（ϵP^3）上一点 M 的两条渐近切线，$\{MM_1M_2M_3\}$ 是对应的 Cartan 规范标架，从而基本方程（3.100）成立，以 U，V 表示这两渐近切线在 Ω 上的象；则可写下

$$U=(M,\ M_1),\qquad V=(M,\ M_2),\tag{3.102}$$

式中 $(M,\ M_i)(i=1,\ 2)$ 表示二阶子式．从（3.99）就可导出

$$\frac{\partial U}{\partial u}=\beta V,\qquad \frac{\partial V}{\partial v}=\gamma U.\tag{3.103}$$

在 P^5 中，整条直线 UV 在 Ω 上，并表示曲面 S 在 M 的切线束．当 u，v 变动时，直线 UV 画成三维流形，就是 S 的切线从在 P^5 中的象流形。

从（3.103）导出下面的 Laplace 方程

$$\begin{aligned}&U_{uv}-(\ln\beta)_vU_u-\beta\gamma U=0,\\&V_{uv}-(\ln\gamma)_uV_v-\beta\gamma V=0.\end{aligned}\tag{3.103$'$}$$

这两个方程表明，曲线 u 与 v 在 P^5 的曲面（U）与（V）上构成共轭网，因而得到 Bompiani[11] 与 Tzitzéica[1] 定理。

定理4.43 设 U，V 是 P^3 中一曲面 S 上一点两渐近切线在 P^5 中 Ω 上两点象，这两点是以渐近参数曲线 u，v 为曲线网的 Laplace 序列 L 的邻点；曲面（V）与（U）分别是（U）与（V）沿方向 u 与 v 的 Laplace 曲面。

设这个 Laplace 序列是

$$(L)\quad \cdots,\ U_n,\ \cdots,\ U_1,\ U,\ V,\ V_1,\ \cdots,\ V_n,\ \cdots,$$

其中任一项是其前项沿 u 方向的 Laplace变换，因而也是其后项沿 v 方向的 Laplace变换．所以曲线 u 与 v 在每个曲面上构成共轭网。

把第 4 段的方法应用到方程（3.103）$'$，就有两个不变量

$$h_1=-(\ln\beta)_{uv}+\beta\gamma,\qquad k_1=\beta\gamma.$$

一般地，

$$\begin{aligned}&(U_n)_v=U_{n+1}+U_n(\ln(\beta h_1\cdots h_n))_v,\\&(U_n)_u=h_nU_{n-1},\\&(U_n)_{uv}-(U_n)_u(\ln(\beta h_1\cdots h_n))_v-h_nU_n=0,\end{aligned}\tag{3.104}$$

式中

$$\begin{aligned}h_n&=-(\ln(\beta h_1\cdots h_{n-1}))_{uv}+h_{n-1}\\&=-(\ln(\beta^n h_1^{n-1}\cdots h_{n-2}^2h_{n-1}))_{uv}+\beta\gamma.\end{aligned}$$

同样，

$$\begin{aligned}&(V_n)_u=V_{n+1}+V_n(\ln(\gamma k_1\cdots k_n))_u,\\&(V_n)_v=k_nV_{n-1},\\&(V_n)_{uv}-(V_n)_v(\ln(\gamma k_1\cdots k_n))_u-k_nV_n=0\end{aligned}\tag{3.105}$$

成立，式中

$$\begin{aligned}k_n&=-(\ln(\gamma k_1\cdots k_{n-1}))_{uv}+k_{n-1}\\&=-(\ln(\gamma^n k_1^{n-1}\cdots k_{n-2}^2k_{n-1}))_{uv}+\beta\gamma.\end{aligned}$$

在P^5中，对应于P^3中一般曲面S的Laplace序列L是不断绝地向两边无限伸展。

关于序列L，我们可以证明

定理4.44 U_n是超平面（$V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$）关于$\Omega$的极；$V_n$是超平面（$U_{n-2}U_{n-1}U_nU_{n+1}U_{n+2}$）关于$\Omega$的极。（证明从略）

这样，就证明了Godeaux定理：

Laplace序列L（称Godeaux序列）关于Klein超二次曲面是自共轭的。

根据这个定理，两平面（$U_nU_{n+1}U_{n+2}$）与（$V_nV_{n+1}V_{n+2}$）关于Ω是两个共轭平面。所以在P^3中得到二次曲面Φ_n，使其两个半织面在P^5中的象是上述两平面与Ω的交线。因此，在曲面S上一点M存在一系列二次曲面Φ，Φ_1，Φ_2，…，全体构成Godeaux**二次曲面序列**。

由于在P^5中，平面（UU_1U_2）是由三点U，U_u，U_v决定的，所以明显地可以看出，在P^3中Godeaux二次曲面序列中第一个

二次曲面Φ是 Lie 二次曲面. Godeaux[1]还得出

定理4.45 Godeaux 二次曲面序列中第二个二次曲面Φ_1就是相伴二次曲面Q_1。

在序列（L）中，两平面（$U_nU_{n+1}U_{n+2}$）与（$U_{n+1}U_{n+2}U_{n+3}$）有共同直线（$U_{n+1}U_{n+2}$），因而两平面（$V_nV_{n+1}V_{n+2}$）与($V_{n+1}V_{n+2}V_{n+3}$）的共同直线与Ω交于两点；就是说，两二次曲面Φ_n与Φ_{n+1}还有另外两条共同母线，因此，Φ_n与Φ_{n+1}切于四点。从而就可以证明

定理4.46 Godeaux二次曲面序列中任意两个相邻二次曲面在四点相切，并且四切点是这两曲面的特征点。

白正国[5]应用上节为推广相伴二次曲面所用的同法，对Godeaux二次曲面序列给出一个新定义。其一是利用相伴于曲面S上一点M的主密切线丛而构成的；另一个定义是利用相伴于曲面S上一点M的渐近直纹面的密切线丛而构成的。这里不阐述其作图法。

附录：问题与定理

一、欧氏微分几何

1．Beltrami定理．一条空间曲线的切线曲面与这条曲线的密切平面交于一条平面曲线；这条平面曲线在原曲线和平面的接触点处的曲率等于原曲线的曲率的$\frac{3}{4}$。(E. Beltrami，Opere，I (1865)，261.)

2．Jacobi定理．若从一个固定点O作平行于闭曲线C的副法线的单位向量 b，则这些单位向量的端点在以O为中心的单位球面上画出一条曲线C的“副法线表示”$\bar{C}$，这条曲线$\bar{C}$把球面分为两半。(C. G. Jacobi，*Werke*，7，**39** (1842).)

3．在一条卵形线上各点放一个质量等于该点的曲率，以$I(l)$表示这个质点组关于某一定直线l的转动惯量，试求直线l使得$I(l)$取最小值，这条直线一定通过曲率中心，并称为曲率轴。(苏步青，1928。)

4．当一条卵形线满足

$$\int_0^{2\pi} R(\alpha)\sin 2\alpha d\alpha = 0\,, \quad \int_0^{2\pi} R(\alpha)\cos 2\alpha d\alpha = 0$$

时，则卵形线与它的平行曲线具有公共的曲率轴。(苏步青，1928.)

5．证明上述卵形线族的顶点至少有六个；外切正方形至少有三个。(Ganapathi，1934.)

6．一条空间曲线的三条邻近主法线所决定的一个二次曲面称为主法线二次曲面。设$\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$为空间中的任意点关于曲线的活动标架的局部坐标，则主法线二次曲面的方程为

$$T^2R'\bar{z}^2 - 2R^2\bar{x}\bar{y} + 2RT\bar{y}\bar{z} - R^2T'\bar{z}\bar{x} - 2R^2T\bar{z} = 0\,,$$

其中R和T分别为曲线的曲率半径和挠率半径.（方德植,〔2〕.）

7．一条空间曲线的三条邻近副法线所决定的一个二次曲面称为副法线二次曲面，则它的方程为

$$T(\bar{x}^2+\bar{y}^2)-RT'\bar{x}\bar{y}+2R\bar{x}\bar{z}-2RT\bar{y}=0,$$

式中所用的记号与前题有同样的意义.（方德植,〔1〕.）

8．若在一条空间曲线上各点的密切平面通过副法线二次曲面的中心，则这个中心必与曲线的曲率中心重合，而且原曲线是一条常挠率曲线，其逆也真.（方德植，〔1〕.）

9．若一条空间曲线上各点的从切面通过主法线二次曲面的中心，则原曲线是一条常挠率曲线,其逆也真.（方德植,〔2〕.）

10．积分 $\int kds$ 称为全曲率．任一空间闭曲线的整曲率$\geqslant 2\pi$，等号只在曲线是卵形线的情形成立.（Fenchel，1929.）

11．积分 $\int \tau ds$ 称为全挠率．这个量对球面上任一闭曲线都等于零，反之，若在一曲面上一切闭曲线都有这个性质，则这个曲面是一个球面或一个平面.（Scherrer，1940.）

12．常阔曲面．具有连续的非零总曲率（$K>0$）的闭曲面称为卵形面．每对平行切面具有常数阔度的卵形面称为常阔曲面．证明对于这样一个曲面：

1°在每对对点的主方向相同，

2°在每对对点的平均曲率相等，

3°在每对对点的法线重合（即为一条二重法线）.（Mellish，1931.）

13．假设一个卵形面的总曲率$K\geqslant A^{-2}$，则它的两点的最大距离$\leqslant\pi A$，其中A是一个正常数.（Bonnet，1855.）

14．设e_0是一个卵形面，又e_h是在e_0外部距离为h的一个平行曲面，它也是一个卵形面，则对于e_h的体积有如下的公式：

$$J_h=J_0+A_0h+M_0h^2+\frac{1}{3}S_0h^3,$$

这里A_0是e_0的面积，M_0是e_0的平均曲率的积分：

$$M_0=\int\frac{1}{2}(k_1+k_2)dA=\int pdS,$$

$$dA=\alpha, \quad dS=\omega^1\wedge\omega^2,$$

而$p>0$是切面到（落在e_0内部的）原点的距离，$S_0=4\pi$是e_0的全曲率。(Steiner, *Werke*, T. 2 (1840), 171—176.)

15．对一个C^2闭曲面，

$$\iint_{\{|x|K(x)\geq 0\}} K\alpha \geq 4\pi \quad \text{(Voss)}.$$

16．若在卵形面e的球面表示$\bar{e}$上给定这个曲面的曲率K，则除了平行移动外可以唯一地决定e，这时$K(a)$只满足条件

$$\int_{\bar{e}} a_j \frac{dS}{K}=0; \quad j=1, \ 2, \ 3, \qquad (*)$$

式中dS表示单位球面$\bar{e}$上具有坐标a_j的点a的面积单元。

换句话说，在条件（*）之下，对于给定的$K(a)>0$（除了平行移动外是唯一的），存在一个卵形面。这个结果本身包括了球面的不可扭曲性。(Minkowski, *Werke*, T. 2(1903), § 10, 230—276.)

17．设k_a是一个曲面上一条渐近曲线C在它的一点P的曲率，k_p是在P点的切面与曲面的交线的曲率，则$|k_p|=\frac{2}{3}k_a$。(Beltrami, 1865.)

18．在一个负曲率曲面上一点P的一条渐近切线t同时切于在P的渐近曲线C与切面和曲面的交线。假设C_1在P的邻近的曲率$k\neq 0$，则C_1落在C与P点的切线t之间。(Van Kampan, 1939.)

19．设在负曲率K（<0）的曲面曲线C上一点P的密切平面与曲面在P点的切面重合，R与T表示C在P点的曲率半径与挠率半径，R_0为在P与C相切的渐近曲线的曲率半径，则

$$\frac{1}{R}=2\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R}\right)\frac{T}{T-\sqrt{-K}} \quad \text{(Beltrami, 1863)}.$$

20．设两个实曲面之间的任一实映射不是共形的，则各个曲面上必唯一地存在一个正交曲线族是互相对应的。(Tissot, 1878.)

21．设两曲面互相贴合，并且它们的渐近曲线互相对应，则这两个曲面互相迭合或者对称。(Bonnet，1867。)

22．对曲面 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v)$ 由 $\mathbf{r}(u, v)+R_1(u, v)\mathbf{e}_3$ 和 $\mathbf{r}(u, v)+R_2(u, v)\mathbf{e}_3$ 给定的曲面，称为原曲面的中心曲面或者渐屈曲面。证明这些曲面是原曲面的法线沿它的曲率线所画成的可展曲面的脊线的轨迹。

23．设曲面的主曲率 k_1, k_2 之间存在函数关系 $F(k_1, k_2)=0$，称这种曲面为 Weingarten 曲面，简称为 W 曲面。证明 W 曲面的两中心曲面的渐近曲线互相对应，其逆也真。特别，$\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}=\text{const}$ 的 W 曲面的两个中心曲面上曲率线互相对应，其逆也真。

24．若取适当的参数，则常曲率曲面的线素可化为如下形式：

当 $K>0$ 时，$ds^2=du^2+\cos^2(\sqrt{K}\,u)\,dv^2$；

当 $K=0$ 时，$ds^2=du^2+dv^2$；

当 $K<0$ 时，$ds^2=du^2+\cos h^2(\sqrt{-K}\,u)\,dv^2$。

25．Dini定理。设两个曲面的测地线互相对应，则

1° 这个对应是位似对应；或者

2° 两个曲面的线素可以同时化为如下形式：

$$ds^2=(U-V)(du^2+dv^2),$$

$$ds_1^2=\left(\frac{1}{V}-\frac{1}{U}\right)\left(\frac{du^2}{U}+\frac{dv^2}{V}\right),$$

式中 U 单是 u 的函数，V 单是 v 的函数，其逆也真。

26．设 u，v 为曲面的曲线坐标，φ 和 ψ 都是 u，v 的函数，则表达式：

$$\nabla(\varphi, \psi)=\frac{E\varphi_v\psi_v-F(\varphi_u\psi_v+\varphi_v\psi_u)+G\varphi_u\psi_u}{EG-F^2}$$

和

$$\Delta\varphi=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\ \frac{G\varphi_u-F\varphi_v}{\sqrt{EG-F^2}}+\frac{\partial}{\partial v}\ \frac{E\varphi_v-F\varphi_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right\}$$

分别称为函数ψ，φ的Beltrami的第一微分参数和第二微分参数。证明

1° 当$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=\nabla(\varphi,\ \varphi)$时，函数$\varphi(u,\ v)$的导数$\frac{d\varphi}{ds}$在曲面上沿方向$ds$是极大；

2°

$$k_g=\frac{\Delta\varphi}{\sqrt{\nabla(\varphi,\varphi)}}+\nabla\left(\varphi,\ \frac{1}{\sqrt{\nabla(\varphi,\varphi)}}\right).$$

(Beltrami，1859。)

27. 关于E^3中所有曲面具有给定的ds^2的Gauss和Bour问题。

若线素

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

是正定的，则在具有这个线素的曲面上每个坐标$x(u,\ v)$满足相同的二阶偏微分方程，则可求出关于u，v的二次微分形式ds^2-dx^2的总曲率等于零：

$$K(ds^2-dx^2)=0.$$

(Bour，1862，Darboux，*Surfaces*，3，1872。)

若利用Maurer-Cartan形式ω^1，ω^2，ω_1^2，ω_1^3，ω_2^3的记号，上述问题化为这样，使得当ω^1，ω^2，ω_1^2给定时，Pfaff形式ω_1^2，ω_1^3从方程

$$\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_1^2=0,$$

$$d\omega_1^2=-\omega_1^3\wedge\omega_2^3,\ d\omega_1^3=\omega_1^2\wedge\omega_1^3$$

来确定。

这个问题建立了"内在几何"的理论与"外在几何"的理论之间的联系。

28. Чебышев 网。若曲面上曲线网中的曲线所构成的四边形的对边都相等，则这种曲线网称为Чебышев 网。

在一个负常曲率K（<0）的曲面上渐近曲线构成一个Чебышев网。设由这些渐近曲线所围成的一个四边形的面积为

A，内角为α_1，α_2，α_3，α_4（都$<\pi$），则

$$KA=2\pi-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4.$$

（Hazzidakis，1880。）

29．Koenige网。由一曲面与一平面束的∞^1交线与顶点在平面束的轴上的锥面与曲面相切的∞^1曲线构成一个共轭网。这种网称为Koenige网。

30．Minkowski公式。设$h=(\mathbf{r},\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)=\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_3$是坐标原点到$\mathbf{r}$点的切面的距离，则称$h$为曲面的支柱函数，则有

$$\iint hH\alpha=\iint\alpha,$$

式中α为曲面面积元素，H为平均曲率。上述公式通称为Minkowski公式。

31．Cohn-Vossen定理。C^2阶互为等距而且处处有正的总曲率的两个卵形面必须是迭合的。

二、仿射微分几何

1．假定一条卵形线C的一切平行弦的中点轨迹都是直线，则C必为一条椭圆。

2．平面曲线的仿射法线的一个特征．行列式$d(s)=(\mathbf{x}'(s),\ \mathbf{x}(s)-\mathbf{y})$有一个极值（$d'(s)=0$）的一个充要条件是$\mathbf{y}$在仿射法线上。何时$d(s)$有一极小，何时有一极大？

3．平面曲线的展开式．在平面曲线一点邻域的展开式，在适当的坐标系下，可以写成如下的标准展开式：

$$x_1=\sigma-\frac{\kappa_0}{3!}\sigma^3-\frac{\kappa_1}{4!}\sigma^4+\frac{\kappa_0^2-\kappa_2}{5!}\sigma^5+\frac{4\kappa_0\kappa_1-\kappa_3}{6!}\sigma^6+\cdots,$$

$$x_2=\frac{1}{2!}\sigma^2-\frac{\kappa_0}{4!}\sigma^4-\frac{2\kappa_1}{5!}\sigma^5+\frac{\kappa_0^2-3\kappa_2}{6!}\sigma^6+\cdots,$$

式中

$$\kappa_n=\left(\frac{d^n\kappa}{d\sigma^n}\right)_{\sigma=0},$$

σ为曲线的仿射弧，$\kappa(\sigma)$为仿射曲率。

设F为曲线与弦$x(0)$，$x(\sigma)$之间的面积，则可求得

$$F=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sigma^3}{6}-\frac{\kappa_0}{120}\sigma^5-\frac{\kappa_1}{240}\sigma^6+\frac{\kappa_0-6\kappa_2}{5040}\sigma^7+\cdots\right\}.$$

设Δ为这条弦及在它的两端点的两切线之间的面积，则

$$\Delta=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sigma^6}{4}+\frac{\kappa_0}{960}\sigma^7+\cdots\right\}.$$

4．密切二次曲线。一条平面曲线$x(\sigma)$的密切二次曲线的方程是

$$(y-x,\ x'')^2+\kappa(y-x,\ x')^2+2(y-x,\ x')=0.$$

5．仿射曲率的一个几何意义（Berwand）。设σ为一曲线弧x_0x_1的仿射弧长，s为抛物线弧的仿射弧长，它与x_0x_1有共同的起点和终点。则在x_0的仿射曲率κ是：

$$\kappa_0=\pm\lim_{x\to x_0}\sqrt{\frac{720(S-\sigma)}{\sigma^5}}.$$

6．椭圆的一个等周性质。具有给定面积F的一切卵形线中只有椭圆给出“仿射周长”。

$$S=\oint(\dot{x},\ \ddot{x})^{\frac{1}{3}}dt$$

的最大值。或者更明确地说：

对一切卵形线给出关系式

$$8\pi^2F-s^3\geqslant 0,$$

等号当且只当椭圆时成立。（W. Blaschke, *Leipziger Berichte*, **68**（1916）。）

7．关于仿射弧长的估计。设$x(\sigma)$是一条椭圆型卵形线：$0\leqslant\sigma\leqslant s$，$(x',\ x'')=1$，$x'''+\kappa x'=0$，$\kappa>0$。又设$\underline{\kappa}$和$\bar{\kappa}$分别为它的仿射曲率的最大值和最小值；则对卵形线的仿射周长s给出如下关系式：

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\bar{\kappa}}}\leqslant s\leqslant\frac{2\pi}{\sqrt{\underline{\kappa}}}.$$

8．关于卵形线的一个不等式：

$$\underline{\kappa} \leqslant \frac{S}{2F} \leqslant \bar{\kappa},$$

式中的记号同前，而F表示卵形线所包围的面积。

9．$k_1=0$ 的空间曲线．这种空间曲线具有这样的特征：它们的仿射主法线与一个固定平面平行。（E. Čech，1923．）

10．假定曲线 $\mathbf{y}=\mathbf{x}+a\mathbf{x}''$（$a$ 是一个不等于零的常数）与 $\mathbf{x}$ 有共同的仿射主法线，则 $\mathbf{x}$ 是一条螺旋线。

这种曲线的重要特征如下：常仿射曲率的曲线，在等积仿射变换群之下是与螺旋线迭合的。

11．空间曲线的展开式．在一空间曲线 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\sigma)$一点 $s=0$ 处取向量 $\mathbf{x}'(0)$，$\mathbf{x}''(0)$，$\mathbf{x}'''(0)$ 为坐标轴，若令

$$t_i=\frac{d^i k_1(0)}{d\sigma^i}, \quad k_i=\frac{d^i k_2(0)}{d\sigma^i},$$

则得到曲线的"标准"展开式如下：

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sigma+\frac{t_0}{4!}\sigma^4+\frac{t_1}{5!}\sigma^5+\frac{t_2+t_0k_0}{6!}\sigma^6 \\
&\quad +\frac{t_0^2+t_3+t_1k_0+3t_0k_1}{7!}\sigma^7+\cdots, \\
x_2 &= \frac{1}{2!}\sigma^2+\frac{k_0}{4!}\sigma^4+\frac{t_0+k_1}{5!}\sigma^5+\frac{2t_1+k_0^2+k_2}{6!}\sigma^6 \\
&\quad +\frac{2t_0k_0+3t_2+4k_0k_1+k_3}{7!}\sigma^7+\cdots, \\
x_3 &= \frac{1}{3!}\sigma^3+\frac{k_0}{5!}\sigma^5+\frac{t_0+2k_1}{6!}\sigma^6+\frac{3t_1+k_0^2+3k_2}{7!}\sigma^7+\cdots.
\end{aligned}$$

12．仿射挠率 k_1 的几何意义．一条空间曲线的三条邻近仿射主法线所决定的一个二次曲面称为曲线的仿射主法线二次曲面，记作Q_P。Q_P的中心是由方程

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}-\frac{1}{k_1}\mathbf{x}'''$$

决定的。（B. Su〔12〕。）

13．仿射 Mannheim曲线．设一空间曲线$\bar{C}$的仿射主法线与

另一条空间曲线C的仿射副法线重合，则称$\overline{C}$为仿射 Mannheim 曲线，C称为$\overline{C}$的共轭曲线。一条空间曲线三条邻近仿射副法线所决定的一个二次曲面称为曲线的仿射副法线二次曲面，记作Q_B。令 $\mathbf{x}(\sigma)$，σ，k_1，k_2；$\bar{\mathbf{x}}(\bar{\sigma})$，$\bar{\sigma}$，$\bar{k}_1$，$\bar{k}_2$分别表示曲线$C$和$\overline{C}$的坐标，仿射弧长，仿射挠率和仿射曲率。

1°

$$\bar{k}_1=\pm k_2^{1/2}\left\{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'-\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2\right\}.$$

2°为了两条空间曲线C和$\overline{C}$互相对应，使得在对应点，C的仿射副法线是$\overline{C}$的仿射主法线，则充要条件是C的仿射不变量具有如下的关系：

$$\frac{1}{2(-k_2)^{1/2}}[3k_2\rho'+\{(1+k_1\rho)(2k_1'+k_2'')-k_2(\rho k_1''+2k_2)\}\rho]$$
$$=\pm b^3(1+k_1\rho)^6\exp\left(-3\int^{\sigma}\frac{k_1'\rho}{1+k_1\rho}d\sigma\right), \qquad (*)$$

式中b是一个任意常数，ρ是 Riccati 方程

$$2k_2\rho'+(-k_2k_1'+k_2'k_1+k_1^2)\rho^2+(2k_1+k_2')\rho+1=0 \qquad (**)$$

的一个解。方程（*）就是曲线C的特征方程。

3°

$$\bar{k}_2=\frac{-1}{s^2k_2^2(\rho\pm 2s)}\left\{k_2^3-k_1'-\frac{k_2''}{2}+\frac{3}{2}\frac{k_2'}{k_2}\left(1+k_1+\frac{k_2'}{2}\right)\right\},$$

式中ρ由方程（**）决定，s由方程

$$s^2=-\frac{b^2}{k_2}\exp\left(2\int^{\sigma}\frac{2k_1\rho'+k_1'\rho}{1+k_1\rho}ds\right)$$

决定。

4°若C和$\overline{C}$的副法线重合，则

$$k_2\left\{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'-\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2\right\}^2=\bar{k}_2\left\{\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right)'-\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right)^2\right\}^2.$$

（方德植〔3〕。）

14．仿射曲率为常数的凸闭曲面只是椭球面。(Blaschke.)

15．曲面的仿射法线的一个几何意义。设 r 是一个凸曲面 S 上一点，π 为 S 在 r 的切面，作平行于 π 的一组平面，与 S 的交线围成平面图形的重心，这些重心的轨迹在点 r 的切线就是曲面 S 在点 r 的仿射法线。

16．二次基本形式的几何意义。在一个双曲型曲面上画一条曲线 r(t)，并在这条曲线上取一个点到 r_k，令其对应参数值为 $t_0=a<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<b=t_n$ 通过 r_{k-1} 和 r_k 的两条渐近曲线的两个新交点记作 Y_k 和 Z_k。以 V_k 表示以 r_{k-1}，r_k，Y_k，Z_k 为顶点的四面形的体积，则当我们稠密地选取 r_k 时，就有

$$\int_a^b |L_{\alpha\beta}|^{-1/8}\left|L_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2+2L_{12}\frac{du^1}{dt}\ \frac{du^2}{dt}+L_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2\right|^{1/2}dt$$

$$=\lim\sum_{k=1}^{n}\sqrt[4]{24V_k}.$$

17．二次基本形式的第二个几何意义。在一个椭圆型曲面上画一曲线 r(t)（$a\leqslant t\leqslant b$）。在任意一点 r(t) 的切面邻近作一平行平面，它与曲面一起围成一个小的卵形体，以 δ 表示它的体积，对 $a\leqslant t\leqslant b$，这个卵形体充满一个体积 V 的管，并有

$$\int_a^b L_{\alpha\beta}|^{-1/8}\left|L_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2+2L_{12}\frac{du^1}{dt}\ \frac{du^2}{dt}+L_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2\right|^{1/2}dt$$

$$=\frac{3\pi^{3/4}}{4\sqrt{2}}\lim_{\delta\to 0}\frac{V}{\delta^{3/4}}.$$

18．正常仿射球面的一个新特征。设一曲面的仿射主曲率是有限的常数，则它是一个正常仿射球面或者是一个仿射曲率为常数的一个斜曲面。(Blaschke〔I〕，239.)

19．H的几何意义。设 p 为曲面上一点 r 的 Lie 二次曲面的中心到曲面在 r 的切面的距离，则有曲面的总曲率$\overline{K}$与它的平均仿射曲率H之间的关系式：

$$H=|\overline{K}|^{1/4}\frac{1}{p}.$$

(P. Franck, *Math. Zeitschrift*, 11 (1921), 297.)

三、射影微分几何

1. 当P画一平面曲线C，令切线上的点P_1画一平面曲线C_1，C_1在P_1的切线与PP_2交于P_n，则称三角形PP_1P_n为Sannia三角形。求证$P_n\equiv(k,\ 0,\ 1)$，k是平面曲线C的射影曲率。

2. 求射影曲率$k(\sigma)\equiv 0$的平面曲线，并证明：经过适当的直射变换后可变为对数螺线（$r=e^{\lambda\theta}$）且其半径与切线构成30°的交角。（Halphen。）

3. 若平面曲线的射影法线通过一个定点，则$k=20\sigma$；其逆也真。

4. $k=$常数的平面曲线称为Halphen的非调和曲线。证明：若一平面曲线C对于无限个直射变换自己变到自己，并且这无限个直射变换构成连续群，则C的k为常数；其逆也真。这种曲线又称为W-曲线。

5. 平面曲线的射影法线PP_2包络一曲线，PP_2与其包络的切点称为射影曲率中心。则这点关于密切二次曲线κ_2的极线重合于Sannia三角形的一边P_1P_n。

6. 设两平面曲线C，$\overline{C}$在一共同点P做成一阶接触，并令K，$\overline{K}$分别为C，$\overline{C}$的三阶接触的二次曲线；K，$\overline{K}$除P外的两交点记作R，S，则直线RS与P点的公共切线交于一个定点。

7. 平面曲线C在P的密切三次曲线的包络除C外就是Halphen点的轨迹。（Lane，〔Ⅰ〕。）

8. 假定在空间曲线C上一点O取适当的坐标系，则C在O的邻域中的展开式可化为

$$\begin{cases} y=x^2+a_6x^6+a_7x^7+\cdots, \\ z=x^3+b_6x^6+b_7x^7+\cdots. \end{cases} \qquad (a_6,\ b_6\neq 0) \qquad (*)$$

因而C在O的密切三次挠曲线的方程是

$$y=x^2,\quad z=x^3.$$

若$a_6=0$和$b_6=0$，则密切三次挠曲线与C在O构成超密

切，这时O不是正常点；所以假定$a_6, b_6 \neq 0$。(Lane〔Ⅰ〕, 64.)

9．空间曲线的密切线丛．在一空间曲线上一点O的切线及其四条邻近切线所决定线丛的极限称为C在O的一个密切线丛。不难求出曲线（*）（见前题）在$O(0, 0, 0)$的密切线丛的方程是

$$\omega_{14}-3\omega_{23}=0,$$

式中ω_{ik}为切线的Plücker坐标．

10．曲线(*)及其在O点的密切三次挠曲线有相同的零系：

$$u_1=y_4,\ u_2=-3y_3,\ u_3=3y_2,\ u_4=-y_1.$$

关于这个零系，密切平面$x_4=0$，主平面$x_3=0$，平面$x_2=0$和平面$x_1=0$分别对应于点（1, 0, 0, 0)，(0, 1, 0, 0)，(0, 0, 1, 0）和（0, 0, 0, 1)。

11．若曲线C在O点的密切线丛超密切，则在C的一个动点的切线与C在O的密切平面的交点轨迹是一条以O为六切点的平面曲线．(Halphen〔2〕, 430—431.)

12．设K_u和K_v分别表示曲面S在P点的切面与S的交线的两支构成四点接触的两个二次曲线束（它们的方程见第四章（3.24）和（3.25)）。以P_u和P_v分别表示切线v和切线u关于K_u和K_v的极，则直线P_uP_v是第二Green棱$l_2\left(\frac{1}{4}\right)$。(Palozzi〔2〕, 544.)

13．设O是曲面S的正常点，C与$\bar{C}$是通过O的两条渐近曲线，t和$\bar{t}$是渐近切线，并且K与$\bar{K}$分别是C与$\bar{C}$在O的四阶密切二次锥面，则t关于$\bar{K}$的极面$\bar{\pi}$与$\bar{t}$关于K的极面π交于第一Green棱$l_1\left(\frac{1}{4}\right)$．对应的Bompiani直线是第二Green棱$l_2\left(\frac{1}{4}\right)$．(苏步青〔Ⅰ〕, §24～28, 109—131.)

14．两条渐近曲线C与$\bar{C}$在其交点（x）各有密切线丛，从而决定两条准线，就是Wilczynski的第一准线$l_1\left(\frac{1}{2}\right)$和第二

准线 $l_2\left(\frac{1}{2}\right)$.

15. 关于一个 Darboux 二次曲面束

$$z-xy+kz^2=0 \qquad (k: 参数)$$

的任二共轭直线之间的对应称为 Lie 配极。显然，任意一对规范直线关于 Lie 配极是共轭直线。两Green 棱与两准线都是特例。

16. 从点M引 Demoulin 四边形的两对角线相交的直线d是第一准线 $l_1\left(\frac{1}{2}\right)$(Bompiani, 1924)；这两对角线与 M 的切面交于第二准线 $l_2\left(\frac{1}{2}\right)$上的两点。并且上述每对交点关于 M, M_3 或 M_1, M_2是调和共轭的。(Godeaux, 1928.)

17. 设 Q_λ 是通过 Demoulin 四边形的任一二次曲面，则切面 (MM_1M_2) 关于 Q_λ 的极落在第一准线 $l_1\left(\frac{1}{2}\right)$上，并且点$M$关于同一二次曲面束的极面必过第二准线。(苏步青〔24〕Ⅰ.)

18. 通过曲面S上一点P的一切射影测地线的密切平面的包络是一个四次锥面C_4，并且S在P点的射影法线由下述两个性质的任一个来决定：

1）它关于C_4的第一配极通过三条 Darboux切线；

2）它关于C_4的第二配极通过两条渐近切线，而且第三配极和曲面在这点的切面重合。(Bompiani〔12〕, 323—332.)

19. 前题中锥面 C_4 有三条尖点直线 C_0, C_1, C_2, 并且三尖点切面相交于射影法线。这三个切面与曲面的切面相交于 Segre 切线，而且三面体$\{C_0, C_1, C_2\}$的三个面与曲面的切面相交于 Darboux 切线。曲面的切面关于三面体的极线是射影法线。(苏步青〔Ⅰ〕, 119—120.)

20. 在曲面S上一点P的渐近曲线u的密切三次曲线C_3与S在P的 Lie 二次曲面有 6 个交点，其中三点重合于P，另三点记作P_i ($i=1, 2, 3$)；在 P_i 作 C_3 的三个密切平面交于一点 R，则R和切线u决定的平面π通过第一Green 棱，它是平面π

与由R和切线v决定的平面的交线，设π_1，π_2表示通过切线u与切线v在P的密切二次锥面的两切面，则π关于π_1，π_2的调和共轭平面α_u通过第一准线$l_1\left(\frac{1}{2}\right)$，它是平面$\alpha_u$与另一类似平面$\alpha_v$的交线。(Calapso〔2〕，266；〔3〕，417。)

21．设(x)为曲面上一点P_x的Fubini法坐标，则在P_x与渐近曲线至少构成四阶接触的任一非分解二次曲面的方程可写为

$$x_2x_3+x_4\left(-3x_1-\frac{1}{2}\varphi x_2-\frac{1}{2}\psi x_3+\lambda x_4\right)$$（$\lambda\neq 0$为任意常数)，称它为曲面在P_x的**主二次曲面**。两条Green棱$l_1\left(\frac{1}{4}\right)$，$l_2\left(\frac{1}{4}\right)$是关于主二次曲面的唯一的一对共轭直线。(Lane〔4〕，706。)

22．在曲面上一点，规范直线$l_2\left(-\frac{1}{6}\right)$是射影法线关于主二次曲面（见前题）的极线。$l_1\left(-\frac{1}{6}\right)$是Fubini-Čech的第一主直线。(Lane〔4〕，706；Fubini-Čech〔I〕，143。)

23．在曲面上一点，规范切线t_1，射影法线n_1，第一准线d_1和任何规范直线$l_1(k)$的交比等于$-2k$。

参考文献

（专　　著）

方德植：

〔Ⅰ〕 微分几何，人民教育出版社(1964)。

苏步青：

〔Ⅰ〕 射影曲线概论，中国科学院(1954)。

〔Ⅱ〕 射影曲面概论，上海科学技术出版社(1964)。

〔Ⅲ〕 射影共轭网概论，上海科学技术出版社(1978)。

佐佐木重夫(苏步青译)：

〔Ⅰ〕 微分几何学，上海科学技术出版社(1963)。

〔Ⅱ〕 黎曼几何学，科学出版社(1964)。

W. 柏拉须凯(方德植译)：

〔Ⅰ〕 微分几何引论，科学出版社(1963)。

W. Blaschke:

〔Ⅰ〕 Vorlesungen Über Differential Geometry Ⅰ, Berlin, 1923.

E. P. Lane:

〔Ⅰ〕 Projective differential geometry of curves and surfaces, Chicago (1932).

〔Ⅱ〕 A Treatise on projective differential geometry, Chicago (1942).

G. Fubini-E. Čech:

〔Ⅰ〕 Geometria Proiettiva Differenziale, Padova, T. I (1926), T. Ⅱ (1927).

〔Ⅱ〕 Introduction à la géométrie Projective différentielle, Paris (1931).

G. Bol:

〔Ⅰ〕 Projektive Differentialgeometrie, Göttingen, I, Teil (1950), Ⅱ, Teil (1954).

H. W. Guggenheimer:

〔Ⅰ〕 Differential geometry, Mcgraw-Hill Book Company, Inc. (1963).

（论　　文）

白正国：

〔1〕 关于Moutard 二次曲面，*Revista Tucumán Univ.*, 2 (1941), 67—77.

〔2〕 关于一系渐近曲线全属于线丛的曲面，*Revista Tucumán Univ.*, 3 (1942).

〔3〕 直纹空间曲面的射影理论（Ⅰ），*Amer. Journ. Math.*, 65 (1943), 712—736；（Ⅱ），*Amer. Journ. Math.*, 66 (1944), 115—121.

〔4〕 一曲面的相伴二次曲面的一个推广，*Amer. Journ. Math.*, 66 (1944), 115—121.

〔5〕 Godeaux二次曲面序列的一个新定义，*Amer. Journ. Math.*, 69 (1947), 117—120.

〔6〕 关于线汇的一些定理和曲面的变换, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 65 (1949), 360—371.

L. Berzolari:

〔1〕 Sugli invarianti differenziali proiettivi delle curve di un iperspazio, *Annali di Mat.*, (Ⅱ)26 (1897), 1—58.

E. Bompiani:

〔1〕 Invarianti proiettivi di contatto fra curve piani, *Rend. dei Lincei*, (Ⅵ) 3(1926), 118—123.

〔2〕 Per lo studio proiettivo-differenziale delle singularità, *Boll Un. Mat. Ital.*, 5 (1926), 118—120.

〔3〕 Invarianti proiettivi di contatto fra due curve piani, *Rend. dei Lincei*, (Ⅵ)14 (1926), 118—123.

〔4〕 Sulle curve sghembe, *Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari*, Davia (1936), 515—552.

〔5〕 Sul contatto di due curve sghembe, *Memoire Accad. Sci di Bologna*, (Ⅷ) 3 (1925—1926).

〔6〕 Invarianti dintersezione di due curve sghembe, *Rend. dei Lincei*, (Ⅵ) 14 (1931_2), 456—461.

〔7〕 Lincei, (Ⅵ)24 (1936).

〔8〕 Fascio di quadriche di Darboux, *Rom. Acc. L. Rend.*, (Ⅵ) (1927), 187—190.

〔9〕 *Rend. dei Lincei*, (Ⅵ)9 (1929), 288—294.

〔10〕 Contributo alla geometria proiettivo-differenziale di una superficie, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 3 (1924), 51.

〔11〕 Sull equazione di Laplace, *Dol. Cire Mat.*, 34 (1912), 383.

〔12〕 *Rend. dei Lincei*, (Ⅵ) 24 (1926), 323—332.

R. Calapso:

〔1〕 Interpretazione geometrica dell'arco proiettivo di una superficie, *Atti Accad. Gioenia*, Catania, (Ⅴ) 19 (1933), Mem, XIV, 1—6.

〔2〕 Un teerema sullo spigolo di Green, *Rom. Acc. L. Rend*, (Ⅵ) 13(1931), 226.

〔3〕 Intorno alla prima diretrice di Wilczynski ed a problemi che a questa si connettono, *Rom. Acc. L. Rend.*, (Ⅵ) 13 (1931), 417.

E. Čech:

〔1〕 L'intorno di un punto d'una superficie considerato dal punto di vista proiettivo, *Ann. di. Mat.*, (Ⅱ) 31 (1922), 191.

张素诚 (S. C. Chang):

〔1〕 Certain plane sections of the developable hypersurface of a curve in

hyperspace, *Revista, Univ. Tucumán.*, 3 (1942).
〔2〕 一平面曲线尖点的研究(未发表).
〔3〕 Note on the projective differential theory of plane curves, *Tôhoku Math. Journ.*, 47 (1940).
〔4〕 The point of inflexion of a plane curve, *Duke Math. Journ.*, 9(1942), 823—832.
〔5〕 论具有一个奇异点S_1^m的平面曲线（未发表）.
〔6〕 The singularity S_1^m of a plane curve, *Duke Math. Journ.*, 9(1942), 833—845.
〔7〕 关于直纹面的几个定理，科学记录（旧刊），1 (1942), 75—77.
〔8〕 关于Lie的二次曲面, *Bull Amer. Math. Soc.*, 49 (1943), 257—261.
〔9〕 关于一致曲面, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49 (1943), 900—903.
〔10〕 关于曲面上一点的有关二次曲面, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 50 (1940), 926—930.
〔11〕 Moutard二次曲面的一个推广，科学记录（旧刊），1 (1945), 337—340.

陈省身(S. S. Chern):
〔1〕 Sur les invariants de contact en géométrie projective différentielle, *Pont. Acad. Sci. Acta.*, 5 (1941), 123—140.
〔2〕 On the invariants of contact of curves in a projective space of N dimensions and their geometrical interpretation, 科学记录（旧刊），1(1942), 11—15.

钟同德 (Tong-Der Chung):
〔1〕 某种平面曲线对的微分几何学，中国数学会学报(新刊)，2 (1953), 157—164.

J. G. Darboux:
〔1〕 Lecon sur la théorie générale des surfaces, V. I. Paris: Gauthier-Vilars (1889).

A. Demoulin:
〔1〕 Sur la quadrique di lie, *C. R.*, 147 (1908), 493—496.

方德植 (T. C. Fon):
〔1〕 A Characteristic property of curves of constant torsion, *Tôhoku Math. Journ.*, 41 (1936), 451—454.
〔2〕 A note on some special curves in space, *Tôhoku. Math. Journ.*, 42 (1936), 80—85.
〔3〕 On the affine Mannheim curves, *Journ. Chinese Math. Soc.*, 1(1936), 62—69.
〔4〕 On the theory of curves in projective plane, *Tôhoku Math. Journ.*, 45 (1939), 252—258.
〔5〕 Note on the projective geometry of space curves, *Annali di Mat.*, (Ⅳ) 18(1939), 97—106.

〔6〕 Some new geometrical significance of the projective curvatures and curvature form of a space curve. *Journ. Chinese Math. Soc.*, 2 (1940), 193—197.

〔7〕 关于曲面的初等形式和射影线素的新定义，厦门大学学报，4 (1954), 1—6.

〔8〕 论一致曲面的特征，厦门大学学报，4 (1954), 56—58.

〔9〕 论曲面的规范直线，厦门大学学报，3 (1955), 1—12.

〔10〕 关于一对相交空间曲线的一个射影协变二次曲面，厦门大学学报，5(1955), 107—110.

〔11〕 两条相交的空间曲线，厦门大学学报，2 (1956), 102—107.

〔12〕 关于具有高阶奇异点的某种平面曲线对，厦门大学学报，2 (1957), 1—13.

〔13〕 关于具有五阶奇异点的某种平面曲线对，厦门大学学报，3 (1961), 179—168.

〔14〕 关于相交于一个 m 阶可表示奇异点的一对平面曲线(未发表)。

〔15〕 关于具有 (m, n) 阶可表示奇异点的某种平面曲线对的研究，数学学报，13 (1963), 223-230.

〔16〕 关于具有 (m, n) 阶不可表示奇异点的某种平面曲线对的研究(未发表)。

L. Godeaux:

〔1〕 中国数学学报（旧刊），2 (1937), 1-5.

G. H. Halphen:

〔1〕 Sur les invariants différentiels, Thése, Paris (1879) ≡ Oeuvres Ⅰ, 197—257.

〔2〕 Sur les invariants différentiels des courbes gauches, *Journ. de e' École Polytech.*, 28 (1880) ≡ Oeuvres Ⅰ, 353—441.

熊全治 (C. C. Hsiung):

〔1〕 Sopra il contatto di due curve piane, *Boll, Un. Mat. Ital.*, (2) 2 (1940), 443-451.

〔2〕 On the curvature form and the projective curvatures of curves in space of 4 dimensions, *Revista. Univ. Tucumàn.*, 1 (1940), 159—171.

〔3〕 Note on the intersection of two space curves, *Tôhoku Math. Journ.*, 47 (1940), 201—209.

〔4〕 On the plane sections of tangent surface of a space curve, *Journ. Chinese Math. Soc.*, 2 (1940), 239—245.

〔5〕 On the curvature form and the projective curvatures of a space curve, 科学记录（旧刊），1 (1942), 72—74.

〔6〕 Projective differential geometry of a pair of plane curves, *Duke Math, Journ.*, 10 (1943), 539—546.

〔7〕 Theory of intersection of two plane curves, *Bull Amer, Math. Soc.*, 49 (1943), 786—792.

〔8〕 An invariant of intersection of two surfaces, *Bull Amer. Math. Soc.*, 49 (1943), 877—880.

〔9〕 Some invariants of certain pairs of hypersurfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51 (1945), 572—582.

〔10〕 Projective invariants of contact of two curves in space of n dimensions, *Quart. Journ. Math.*, Oxford Series, 17 (1946), 39—45.

〔11〕 Plane sections of the tangent surfaces of two space curve, *Duke Math. Journ.*, 10 (1947), 151—158.

周彭年 (P. N. Jou):

〔1〕 Invariants of contact of two varieties in a projective space, 科学记录, 4 (1951), 41—50.

A. Kawaguchi:

〔1〕 Über projektive Differentialgeometrie IV, *Tôhoku Math. Journ.*, 29 (1928), 160—165.

L. P. Lane:

〔1〕 The projective differential geometry of system of linear homogeneous differential equations of the first order, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 30 (1928), 785—796.

〔2〕 The correspondence between the tangent plane of a surface and its point of contact, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 48 (1926), 204.

〔3〕 A canonical power series expansions for a surface, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 37 (1935), 463—482.

〔4〕 Invariants of intersection of two curves on a surface, *Amer. Journ.*, 54 (1932), 699.

Moutard:

〔1〕 Sur le contact des courbes et des surfaces, *C. R.*, 91 (1880), 1055.

G. Palozzi:

〔1〕 Sugli invarianti proiettivi di contatto fra curve sghembe, *Rend. dei Lincei*, (Ⅵ) 7 (1928), 321—325.

〔2〕 Alcuni risultati di geometria proiettivo-differen ziale, *Rend. dei Lincei*, (Ⅵ)15 (1932), 543—548.

〔3〕 Sugli invarianti proiettivi di contatto fra curve piani in un punto di flesso, *Rend. dei Lincei*, (Ⅵ)7 (1928), 115—119.

〔4〕 Sur piano principale di Halphen e sulla retta e sul punto principale di due curve sghembe, *Atti del congresso di Bologna*, 4 (1928), 385.

I. Popa:

〔1〕 Geometria proiettivo-differenziale delle singolarità delle curve piane, *Rend. dei Lincei*, (Ⅵ)25 (1937), 220—222.

G. Sannia:

〔1〕 Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve piane, *Rend. dei Lincei* (Ⅴ) 31^1 (1922), 450—506; 31^2 (1922), 17—

19, 430—434.

〔2〕 Nuova trattazioni della geometria proiettivo-differenziale delle curve sghembe, Memoria 1°, *Annali di Mat.*, (Ⅳ) 1 (1924), 1—18; Memoria 2°, ibid., 3 (1926), 1—25.

B. Segre:

〔1〕 Sugli elementi curvilinei che hanno Communi le origine ed i veletivi spazio osculatori, *Rend dei Lincei*, (Ⅵ) 22 (1935_2), 392—399.

〔2〕 On tac-invariants of two curve in a projective space, *Quart. Journ. Math.*, Oxford Sevies, 17 (1946), 35—38.

C. Segre:

〔1〕 Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie, *Rend. dei Lincei*, (Ⅴ) 6 (1897), 168—175.

〔2〕 Complementi alla teoria delle tangenti congugate in una superficie, *Rom. Acc. L. Rend.*, (Ⅴ) 17^2(1908), 405.

E. B. Stouffer:

〔1〕 On the contact of two space curves, *Bull. Amer Math. Soc.*, 38(1932), 415.

V. Strazzeri:

〔1〕 Una definizione geometrica delle spigolo di Green, *Rend. Cire. Mat. di Palermo*, 54 (1930), 295.

苏步青 (Buchin Su):

〔1〕 One certain quadratic cones projectively connected with a space curve and a surface, *Tôhoku Math. Journ.*, 38 (1933), 233—244.

〔2〕 On the intersection of two curves in space, *Tôhoku Math. Journ.*, 39 (1934), 226—232.

〔3〕 Invariants of intersection of two curves in space, *Science Reports of Tôhoku Imperial University*, (Ⅰ) 25 (1936), 22—33.

〔4〕 On certain twisted cubics projectively connected with a space curve, 中国数学会学报 (旧刊), 2 (1937), 54—60.

〔5〕 Note on the projective differential geometry of space curves, 中国数学会学报 (旧刊), 2 (1937), 98—137.

〔6〕 The general projective theory of curves in space of four dimensions, 浙江大学理科报告, 2 (1937), 115—169.

〔7〕 An extension of Bompiani's osculants for a plane curve with a singular point, *Tôhoku Math. Journ.*, 45 (1939), 239—244.

〔8〕 Plane sections of the tangent surface of a space curve, *Annali di Mat.*, 18 (1939), 77—96.

〔9〕 Projective differential geometry of singularities of plane curves, 中国数学会学报 (旧刊), 2 (1940), 139—151.

〔10〕 Contributions to the projective theory of curves in space of N dimen-

sions, First Memoir, 中国数学会学报（旧刊），2 (1940), 153-173.

〔11〕 Contributions to the projective theory of curves in space of N dimensions, Second Memoir, 中国数学会学报（旧刊），2 (1940), 277—289.

〔12〕 Notes on the theory in the affine spaces, *Japanese Journ. of Math.*, 8 (1930).

〔13〕 Some arithmetical invariants of a curve in projective space of N dimensions, *Revista, Univ. Tucumàn*, 1 (1940), 143—157.

〔14〕 An analogue of Bertrand curves in the projective space, *Jap. J. Math.*, 9 (1933), 239—252.

〔15〕 Note on a theorem of B. Segre, 科学记录（旧刊），1 (1942), 16—19.

〔16〕 Eine Bemerkung zur Projektive Differentialgeometrie der Flächen, (mit Prof. T. Kubota), *Science Reports of Tôhoku Imperial University*, (Ⅰ) 19 (1930), 291—300.

〔17〕 The canonical edges of Green, *Tôhoku Math. Journ.*, 39 (1934), 269—278. Corrections ibid., 41 (1936).

〔18〕 On certain tac-invariants of two curves in a projective space, *Quart. Journ. Math., Oxford Series*, 17 (1946), 116—118.

〔19〕 Alcuni invarianti di contatto di due varietà in uno spazio proiettivo, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (3) 2 (1947), 9—12.

〔20〕 曲面的渐近网与调和线汇，数学学报，3 (1953), 167—176.

〔21〕 关于曲面射影几何学的一个注记，*Japanese, Journ. Math.*, 7 (1930), 199—208.

〔22〕 曲面的射影几何的一个注记 (Kubota 共著), *Sci Rep. Tôhoku Imp. Univ.*, 19 (1930), 293—300.

〔23〕 关于曲面有关的某些射影协变二次锥面 (Ichida 共著), *Japanese Journ. Math.*, 10 (1934), 209—216.

〔24〕 渐近曲线全属于线丛的曲面（Ⅰ），*Tôhoku Math. Journ.*, 40 (1935), 408—420；（Ⅱ）*Tôhoku Math. Journ.*, 40 (1935), 433—448；（Ⅲ），*Tôhoku Math. Journ.*, 41 (1935), 1—19；（Ⅳ），*Tôhoku Math. Journ.*, 41 (1935), 203—215；（Ⅴ），*Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ.*, 24 (1936), 601—633；（Ⅵ），*Sci Rep. Tôhoku Imp. Univ.*, 24 (1936), 634—642.

〔25〕 过曲面上一点的平截线的密切二次曲线，*Amer. Journ. Math.*, 44 (1943) 7—20.

A. Terracini:

〔1〕 Sui significato geometrico della mormale proiettiva, *Rend. dei Lincei*, (Ⅵ) 3 (1926), 584—591.

〔2〕 La Lunghezza proiettiva di un arco di curve piana, *Periodico di Mathematiche*, (Ⅳ) 13 (1933).

〔3〕 Sull'elemento lineare proiettivo di una superfie, *Rend. dei Lincei* (Ⅵ) (1926).

G. Thomsen:

〔1〕 Sulle superficie minime proiettive, *Ann. di Mat.*, (Ⅳ) 5 (1928), 169—154.

〔2〕 *Abh. d. Math. Sem.*, Hamburg, 4, 1926, 265.

Tzitzéica:

〔1〕 Geometrie différentielle projective des réseaux, Paris: Gauthier-Villars; Bucarest: Cvltvra Nationalǎ (1924).

F. Vyčichlo:

〔1〕 Sur une interprétation géométrique de la courbure projective des courbes planes, *Bull. de la Soc. Math. de France*, 64(1936), 87—98.

〔2〕 Interpretazione geometrica della curvatura proiettiva delle curve piani, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 17 (1938), 75—77.

E. J. Wilczynski:

〔1〕 Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, *Chp.* Ⅱ, *Leipzig*, Teubner (1906).

吴祖基:

〔1〕 曲面上一点的有关织面系统Ⅰ，Ⅱ，*Duke Math. Journ.*, 10(1943), 499—513.

〔2〕 关于曲面的主切弦织面的一个注记，科学记录（旧刊），2 (1949), 345—355.

姚敬之 (Chin-Chuh Yao):

〔1〕 两条平面曲线的接触协变直线的几何解释，复旦学报，2 (1956), 83—87.